2. Baskı

Genel Matematik 2 Problemleri

Prof. Dr. Mustafa BALCI

KİTAP

balcı Yayınları

byns
www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

ÖNSÖZ

Bu kitap, GENEL MATEMATİK–2 adlı kitabımızdaki problemlerin çözümlerini içermektedir.

Kitap, Uzayda Vektörler, Doğru ve Düzlem Denklemleri, Vektör Değerli Fonksiyonlar, Çok Değişkenli Fonksiyonlar, Çok Katlı İntegraller, Eğrisel İntegral ve Yüzey İntegralleri konularının problem çözümlerini kapsadığından bu konuları içeren Genel Matematik, Analiz, Yüksek Matematik, İleri Matematik ve Calculus dersleri için de bir yardımcı kaynaktır.

Çözümler çok kısa bir süre içinde tarafımdan yapıldığından, bazı işlem hatalarının olabileceğini peşinen kabul eder, bu konuda uyarılarda bulunacak meslektaş ve öğrencilere şimdiden teşekkürü bir borç bilirim.

Kitabın tüm öğrenen ve öğretenlere yararlı olması dileğiyle.

Prof. Dr. Mustafa Balcı

!!!DİKKAT!!!
Fotokopi çekip çalışmak isteyenler soru numaraları kırmızı olduğundan gözükmemektedir.Bu yüzden daha koyu bir şekilde çıkartırsanız:"Hangi sorunun cevabı la bu."
Şeklinde bir soruyla karşılaşmazsınız.

Gözlerimizi kapayıp, yalnız yaşadığımızı varsayamayız. Ülkemizi bir çember içine alıp dünya ile ilgilenmeksizin yaşayamayız. Tersine gelişmiş,uygarlaşmış bir ulus olarak uygarlık alanının üzerinde yaşayacağız: bu yaşam ancak bilim ve fenle olur. bilim ve fen nerede ise oradan alacağız ve ulusun her bireyinin kafasına koyacağız. Bilim ve fen için bağ ve koşul yoktur. (1922; S.D. I)
K.ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımızla..

11 VEKTÖRLER, DOĞRU VE DÜZLEM DENKLEMLERİ

Düzlemde Vektörler 1
Uzayda Vektörler 8
Uzayda Doğru Denklemleri 18
Düzlem Denklemleri 23

12 VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Vektör Değerli Fonksiyonlar 35
Vektör Değerli Fonksiyonların Limit ve Sürekliliği 35
Vektör Değerli Fonksiyonların Türevi 40
Vektör Değerli Fonksiyonların İntegrali 40

13 ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

Tanım Kümesi, Limit ve Süreklilik 52
Kısmi Türevler 59
Zincir Kuralı 72
Kapalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonların Türevi 73
Yönlü Türevler 88
Kısmi Türevlerin Geometrik Anlamı 88
İki Değişkenli Fonksiyonların Taylor Açılımı 88
Maksimum ve Minimumlar 98

14 ÇOK KATLI İNTEGRALLER

İki Katlı İntegraller 126
İki Katlı İntegrallerin Uygulamaları 138
Üç Katlı İntegraller 155
Üç Katlı İntegrallerin Uygulamaları 165

15 EĞRİSEL İNTEGRALLER

Eğrisel İntegraller 186
Eğrisel İntegrallerin Uygulamaları 199

16 YÜZEY İNTEGRALLERİ

Reel Değerli Fonksiyonların Yüzey İntegralleri 210
İkinci Çeşit Yüzey İntegralleri 210
Yüzey İntegrallerinin Temel Teoremleri 217
Yüzey İntegrallerinin Uygulamaları 224

byns

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

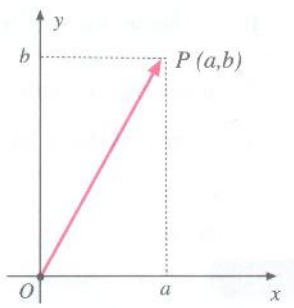
11 VEKTÖRLER, DOĞRU VE DÜZLEM DENKLEMLERİ

DÜZLEMDE VEKTÖRLER

VEKTÖRLER VE VEKTÖRLERİN EŞİTLİĞİ

TANIM

Kartezyen, düzlemde $u = (a, b)$ biçiminde verilen her bir sıralı ikilisine bir **vektör** denir. a ve b sayılarına da u vektörünün **bileşenleri** adı verilir.



VEKTÖRLERİN EŞİTLİĞİ

TANIM

$u = (a, b)$ ve $v = (c, d)$ olsun.
$u = v \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$.

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları için $AB = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ dir.

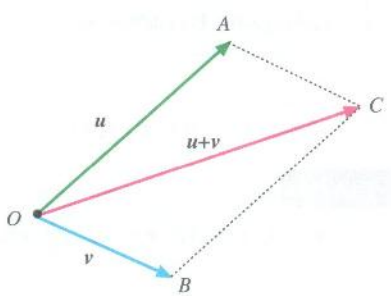
VEKTÖRLERİN TOPLANMASI

TANIM

$u = (a, b)$ ve $v = (c, d)$ iki vektör olsun. Bu iki vektörün toplamı

$$u + v = (a + c,\ b + d)$$

vektörüdür.

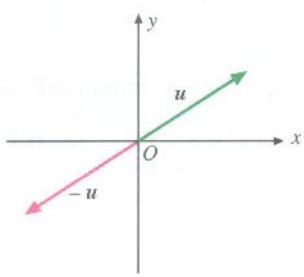


SONUÇ

İki vektörün toplamı, bu iki vektör üzerine kurulan paralelkenarın bir köşegenidir.

TANIM

$-u = (-a, -b)$ vektörüne $u = (a, b)$ vektörünün **tersi** denir. $-u$ ile u aynı büyüklükte fakat zıt yönlü iki vektördür..



ters vektör

u ile v vektörünün farkı

$$u - v = u + (-v)$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre,

$$u - v = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d)$$

vektörü olacaktır.

VEKTÖRLERİN BİR SAYI İLE ÇARPIMI

TANIM

$u = (a, b)$ vektörünün λ reel sayısı ile çarpımı

$\lambda u = (\lambda a , \lambda b)$

vektörüdür.

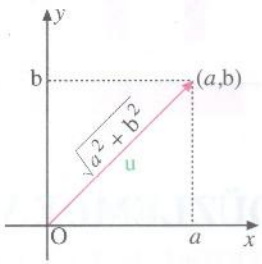
BİR VEKTÖRÜN BOYU

TANIM

$u = (a, b)$ vektörünün boyu

$$\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

sayısıdır.



BİRİM VEKTÖRLER

TANIM

Boyu 1 birim olan vektöre bir **birim vektör** denir.

Bu tanıma göre şu önerme doğrudur :

u bir birim vektördür $\Leftrightarrow \|u\| = 1$ dir.

VEKTÖRLERİN SKALER ÇARPIMI

TANIM

$u = (u_1 , u_2)$, $v = (v_1 , v_2)$ vektörlerinin **skalar çarpımı**

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

reel sayısıdır. Bu işleme **Öklit iç çarpımı** veya **nokta çarpım** da denir.

PARALEL VE DİK VEKTÖRLER

TANIM

$u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1 , v_2)$ vektörleri için

$$u \parallel v \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

u ile v, sıfırdan farklı iki vektör olsun.

$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0.$$

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

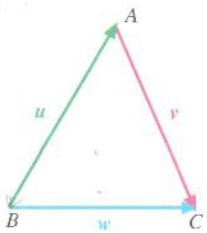
PROBLEMLER

- Düzlemde Vektörler
- Vektörlerin Skaler Çarpımı
- Dik ve Paralel Vektörler

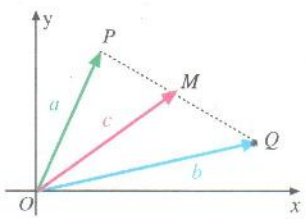
1. Şekilde u, v, w vektörleri ABC üçgeninin kenarları tarafından belirtilmiştir.

(a) w vektörünü u ile v,

(b) v vektörünü u ile w cinsinden yazınız.



2.

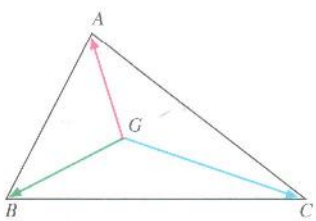


Yukıdaki şekilde M noktası $[PQ]$ doğru parçasının orta noktasıdır.

$$c = \frac{1}{2}(a + b)$$

olduğunu gösteriniz.

3.

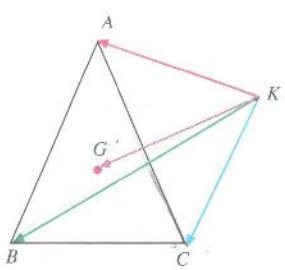


Şekilde G, kenarortayların kesim noktasıdır.

$$GA + GB + GC = 0$$

olduğunu gösteriniz.

4.

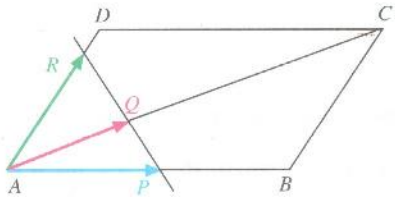


ΔABC üçgeninin ağırlık merkezi G ve üçgen düzleminde alınan herhangi bir nokta K olsun.

$$KA + KB + KC = 3\,KG$$

olacağını gösteriniz.

5.



Şekilde $ABCD$ paralelkenardır.

$AP = \lambda_1 AB$, $AQ = \lambda_2 AC$, $AR = \lambda_3 AD$ olduğunda,

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3}$$

olacağını gösteriniz.

6. $u = (2, -1)$, $v = (-1, 1)$ vektörleri için

$u + v$, $u - v$, $3u - 2v$, $-4u$, $5v$

vektörlerini bulunuz.

7. Bitim noktası $B(3, -11)$ olan $AB = (2, 5)$ vektörünün A başlangıç noktasını bulunuz.

8. Aşağıdaki vektörlerin boyunu (büyüklüğünü) hesaplayınız.

$a = (4, 12)$ $\quad c = (-6, -8)$ $\quad m = (1, -1)$

$b = (-5, 12)$ $\quad d = (3, 0)$ $\quad n = \left(\sqrt{2}, \sqrt{14}\right)$

9. $(9, 12) = 3\,(x, y) + 2\,(3, 0)$ eşitliğini sağlayan x ve y sayılarını bulunuz.

10. $u + v = i$ ve $u - v = j$ eşitliklerini sağlayan u ve v vektörlerini bulunuz.

11. $u = (8, -9)$ vektörünün $a = (1, -3)$ ve $b = (-2, 1)$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazınız. u vektörünün bu vektörlere göre bileşenlerini bulunuz.

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

12. Uzunluğu, $(16, -12)$ vektörünün uzunluğunun yarısı, yönü bu vektörün yönünün tersi olan bir vektör bulunuz.

13. Aşağıdaki vektörlerle aynı yönlü birer birim vektör bulunuz.

(a) $(-8, -6)$ (b) $(5, 0)$ (c) $3i - 4j$

14. Aşağıdaki vektörlerle zıt yönlü birer birim vektör bulunuz.

(a) $(4, 3)$ (b) $(0, 6)$ (c) $5i + 12j$

15. $u = (2, 3)$, $v = (-1, 5)$, $w = (7, -9)$ vektörleri veriliyor.

$$w = au + bv$$

eşitliğini sağlayan a ve b sayılarını bulunuz.

16. Aşağıdaki vektör çiftlerinin skalar çarpımlarını hesaplayınız.

(a) $(2, 4); (1, -3)$ (b) $(-4, -6); (-2, 5)$

17. Aşağıda boyları ve aralarındaki açının ölçüsü verilen vektörlerin skalar çarpımını bulunuz.

(a) $\|u\| = 4, \quad \|v\| = 6, \quad \theta = 60°$

(b) $\|u\| = 2, \quad \|v\| = 3, \quad \theta = 150°$

(c) $\|u\| = 5, \quad \|v\| = 4, \quad \theta = 180°$

(d) $\|u\| = 4, \quad \|v\| = 6, \quad \theta = 0$

18. $u = (4, 3)$, $v = (6, 8)$ vektörleri için

$(u + v)\ (u - v)$

çarpımını hesaplayınız.

19. u ile v, 120 derecelik açı yapan iki vektör olsun.

$\|u\| = 4, \quad \|v\| = 3$ olduğuna göre aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

(a) $u \cdot v$ (e) $v^2 = v \cdot v$

(b) $\|u + v\|$ (f) $\|3u + 2v\|$

(c) $\|u - v\|$ (g) $(2u - v)^2$

(d) $u^2 = u \cdot u$ (h) $(3u + 2v) \cdot (3u - 2v)$

20. Her a ve b vektörleri için

$$u = \|b\| a + \|a\| b, \quad v = \|a\| b - \|b\| a$$

vektörlerinin dik olacaklarını gösteriniz.

21. $\|u\| = 11$, $\|v\| = 23$ ve $\|u - v\| = 30$ olduğuna göre

$\|u + v\|$ nedir?

22. $a + b + c = 0$ bağıntısını sağlayan a, b, c birim vektörleri için

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$$

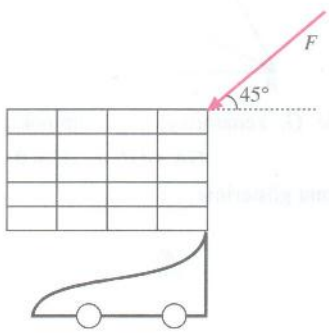
toplamını hesaplayınız.

23. $\|a\| = 3$, $\|b\| = 5$ olduğuna göre t nin hangi değerleri için $a + tb$ ile $a - tb$ vektörleri birbirlerine dik olur?

24. $a \cdot b = a \cdot c$ ve $a \neq 0$ ise $b = c$ midir?

25. Uzunluğu 2 birim ve yönü $u = -i + 2j$ ile zıt yönlü olan bir vektör bulunuz.

26.



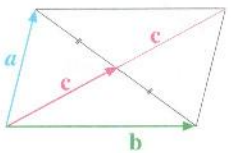
Büyüklüğü $\|F\| = 30$ Newton olan bir kuvvet, yatayla 45 derecelik açı yapacak şekilde bir market arabasına etki etmektedir. Bu kuvvetin yatay ve düşey bileşenlerini bulunuz.

☞ ÇÖZÜMLER

1. (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$,

(b) $\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u}$

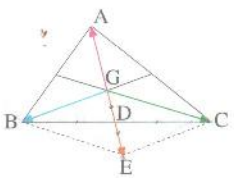
2. $2\mathbf{c} = a + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} = \frac{1}{2}(a+\mathbf{b})$



3. |DE| = |GD| olacak biçimde, GD üzerinde bir E noktası alalım.

$\mathbf{GA} = -\mathbf{GE}$ dir.

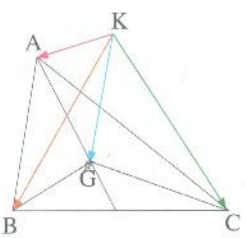
$\mathbf{GB} + \mathbf{GC} = \mathbf{GE} \Rightarrow \mathbf{GB} + \mathbf{GC} = -\mathbf{GA} \Rightarrow \mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} = \mathbf{0}.$



4.
$$\begin{array}{l} \mathbf{KG} + \mathbf{GA} = \mathbf{KA} \\ \mathbf{KG} + \mathbf{GB} = \mathbf{KB} \\ + \quad \mathbf{KG} + \mathbf{GC} = \mathbf{KC} \\ \hline \end{array}$$

$$3\,\mathbf{KG} + \underbrace{\mathbf{GA}+\mathbf{GB}+\mathbf{GC}}_{0} = \mathbf{KA}+\mathbf{KB}+\mathbf{KC}$$

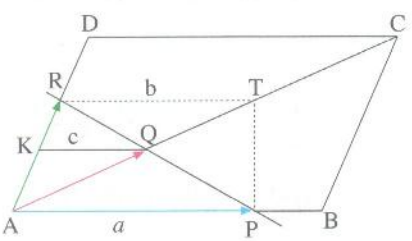
$$3\,\mathbf{KG} = \mathbf{KA} + \mathbf{KB} + \mathbf{KC}$$



5. R noktasından AB kenarına RT, Q dan KQ paralelini çizelim.

$$\frac{b}{|DC|} = \frac{|AR|}{|AD|} \Rightarrow \frac{b}{|AB|} = \frac{\lambda_3|AD|}{|AD|} \Rightarrow b = \lambda_3|AB|$$

$$\frac{c}{|DC|} = \frac{|AQ|}{|AC|} \Rightarrow \frac{c}{|AB|} = \frac{\lambda_2|AC|}{|AC|} \Rightarrow c = \lambda_2|AB|$$



olur. $a = \lambda_1|AB|$ olduğu verilmişti. APTR yamuğunda $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ olduğundan

$$\frac{1}{\lambda_2|AB|} = \frac{1}{\lambda_1|AB|} + \frac{1}{\lambda_3|AB|} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_3}$$ bulunur.

6. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2-1, -1+1) = (1,0)$, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (2+1, -1-1) = (3, -2)$, $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = (6, -3) - (-2, 2) = (6+2, -3-2) = (8, -5)$

$-4\mathbf{u} = [4.2, 4(-1)] = (8, -4)$, $5\mathbf{v} = (5(-1), 5.1) = (-5, 5)$

7. A(x, y), AB = (5−x, −1−y) = (2, 5) ⇒ 3−x = 2 ve −1 − y = 5 ⇒ x = 1, y = −16 A(1, −16)

8. $\|a\| = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = \sqrt{16.10} = 4\sqrt{10}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$\|\mathbf{c}\| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$, $\|\mathbf{d}\| = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$

$\|\mathbf{m}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{2+14} = \sqrt{16} = 4$

9. $(9, 12) = (3x + 3y) + (6, 0) = (3x + 6, 3y) \Rightarrow 3x + 6 = 9$ ve $3y = 12 \Rightarrow x = 1,\ y = 4$

10. $\left.\begin{matrix}\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{i}\\ \mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{j}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\mathbf{u} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ ve $2\mathbf{v} = \mathbf{i}-\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}),\ \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$

11. $\mathbf{u} = x\boldsymbol{a} + y\mathbf{b} \Rightarrow (x, -3x) + (-2y, y) = (x-2y, -3x+y) = (8, -9)$

$\left.\begin{matrix}x-2y=8\\ -3x+y=-9\end{matrix}\right\} \Rightarrow x = -2,\ y = -3$ olur. $\mathbf{u}$ nun $\boldsymbol{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörerine göre bileşinleri $(2, -3)$ tür.

12. $\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} = \left(-\frac{16}{2}, \frac{12}{2}\right) = (-8, 6)$

13. *(a)* $\boldsymbol{a} = (-8, -6)$, $\|\boldsymbol{a}\| = 10$, $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{10}(-8, -6) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

(b) $\mathbf{b} = (5,0)$, $\|\mathbf{b}\| = 5$, $\mathbf{v} = \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b} = \frac{1}{5}(5,0) = (1,0)$

(c) $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\|\mathbf{c}\| = 5$, $\mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{c}\|}\mathbf{c} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

14. $-\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = -\frac{1}{5}(4,3) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

$-\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b} = -\frac{1}{6}(0,6) = (0,-1)$

$-\frac{1}{\|\mathbf{c}\|}\mathbf{c} = -\frac{1}{12}(5,12) = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

15. $\mathbf{w} = a\mathbf{u}+b\mathbf{v} \Rightarrow (7, -9) = a(2, 3) + b(-1,5) \Rightarrow (7, -9) = (2a-b, 3a+5b) \Rightarrow \left.\begin{matrix}2a-b=7\\ 3a+5b=-9\end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 2,\ b = -3$

16. *(a)* $(2,4).(1, -3) = 2 - 12 = -10$ *(b)* $(-4, -6).(-2, 5) = 8 - 30 = -22$

17. *(a)* $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\| \cos 60 = 4.6.\frac{1}{2} = 12$ *(b)* $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 2.3.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$

(c) $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 5.4.(-1) = -20$ *(d)* $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 4.6.1 = 24$

18. $(\mathbf{u}+\mathbf{v}).(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}.\mathbf{u} - \mathbf{v}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 25 - 100 = -75$

19. (a) $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\ \cos\theta = 4.3.\left(-\frac{1}{2}\right) = -6$

(b) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v}).(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}.\mathbf{u} + \mathbf{v}.\mathbf{v} + 2\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\cos 120°$

$= 16 + 9 + 2.4.3.\left(-\frac{1}{2}\right) = 13 \Rightarrow \|u+\mathbf{v}\| = \sqrt{13}$

(c) $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}.\mathbf{v} = 16 + 9 + 12 = 37 \Rightarrow \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{37}$

(d) $\mathbf{u}^2 = \|\mathbf{u}\|^2 = 16,$

(e) $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}.\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 = 9$

(f) $\|2\mathbf{u}+3\mathbf{v}\|^2 = 4\mathbf{u}^2 + 9\mathbf{v}^2 + 12\mathbf{u}.\mathbf{v} = 4.16 + 9.9 + 12.4.3.\left(-\frac{1}{2}\right) = 64 + 81 - 72 = 73 \Rightarrow \|2\mathbf{u}+3\mathbf{v}\| = \sqrt{73}$

20. $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \left(\|\mathbf{b}\|a + \|a\|\mathbf{b}\right).\left(\|a\|\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|a\right) = \|\mathbf{a}\|\ \|\mathbf{b}\|a.\mathbf{b} - \|\mathbf{b}\|^2 a.a + \|a\|^2 \mathbf{b}.\mathbf{b} - \|a\|\ \|\mathbf{b}\|a.\mathbf{b}$

$= -\|\mathbf{b}\|^2\|a\|^2 + \|a\|^2\|\mathbf{b}\|^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

21. $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 900 \Rightarrow \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}.\mathbf{v} = 900 \Rightarrow 11^2 + 23^2 - 2\mathbf{u}.\mathbf{v} = 900 \Rightarrow 2\mathbf{u}.\mathbf{v} = -250$

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{u}.\mathbf{v} = 121 + 529 - 250 = 400 \Rightarrow \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = 20$

22. $a.(a+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = a.0 \Rightarrow a^2 + a.\mathbf{b} + a.\mathbf{c} = 0 \Rightarrow a.\mathbf{b} + a.\mathbf{c} = -1$

$\mathbf{b}.(a+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{b}.0 \Rightarrow \mathbf{b}^2 + a.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} = 0 \Rightarrow a.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} = -1$

$\mathbf{c}.(a+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{c}.0 \Rightarrow \mathbf{c}^2 + a.\mathbf{c} + \mathbf{b}.\mathbf{c} = 0 \Rightarrow a.\mathbf{c} + \mathbf{b}.\mathbf{c} = -1$

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

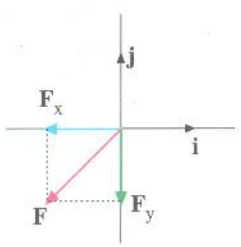
$2\,(a.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.a) = -3 \Rightarrow a.\mathbf{b} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{c}.a = -\frac{3}{2}$ bulunur.

23. $(a+t\mathbf{b}).(a-t\mathbf{b}) = 0 \Rightarrow a^2 - t^2\mathbf{b}^2 = 0 \Rightarrow \|a\|^2 - t^2\|\mathbf{b}\|^2 = 0 \Rightarrow 9 - t^2.25 = 0 \Rightarrow t = \pm 3/5$

24. $a = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 2)$, $\mathbf{c} = (3, 3)$ için $a.\mathbf{b} = a.\mathbf{c} = 0$ olduğu halde $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$ dir.

25. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \qquad \mathbf{v} = \frac{2}{\sqrt{5}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$

26. $\mathbf{F}_x = 30.\cos 45°(-\mathbf{i}) = -30\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} = -15\sqrt{2}\mathbf{i}$, $\mathbf{F}_y = 30.\cos 45°(-\mathbf{j}) = -30\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} = -15\sqrt{2}\mathbf{j}$



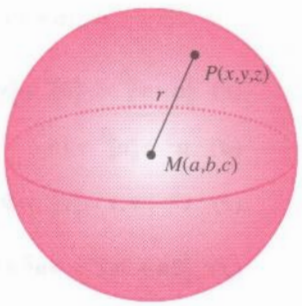
UZAYDA VEKTÖRLER

UZAYDA İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

KÜRE DENKLEMİ

$$(x-a)^2 + (y-b) + (z-c)^2 = r^2$$

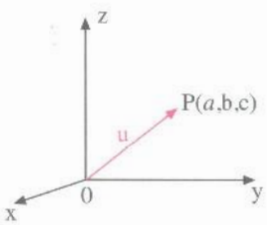


VEKTÖRÜN BOYU

u=(a, b, c) vektörünün boyu

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

sayıdır.



BİRİM VEKTÖR

TANIM

$\|\mathbf{e}\| = 1$ ise e vektörüne bir **birim vektör** denir.

VEKTÖRLERİN TOPLAM VE FARKI

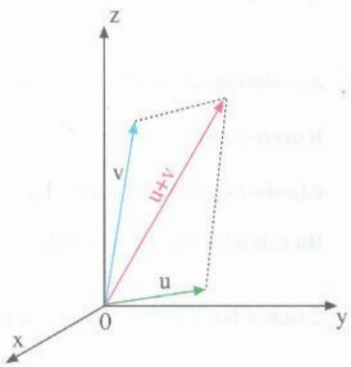
TANIM

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin **toplam** ve **farkı**, sırası ile,

$$u + v = (u_1 + v_1 \ , \ u_2 + v_2 \ , \ u_3 + v_3)$$

$$u - v = (u_1 - v_1 \ , \ u_2 - v_2 \ , \ u_3 - v_3)$$

vektörleridir.



VEKTÖRLERİN BİR SAYI İLE ÇARPIMI

TANIM

$\lambda \in R$ sayısı ile $u = (a, b, c)$ vektörünün çarpımı

$$\lambda u = (\lambda a, \ \lambda b, \ \lambda c)$$

vektörüdür.

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

SKALAR ÇARPIM

TANIM

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin **skalar çarpımı**

$$u \,.\, v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

sayısıdır.

TEOREM

u, v, w vektörleri ve λ reel sayısı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır :

(1) $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{u} = \mathbf{u}.\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

(2) $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = \mathbf{v} \,.\, \mathbf{u}$ (değişme özeliği)

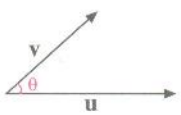
(3) $\mathbf{u} \,.\, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} + \mathbf{u} \,.\, \mathbf{w}$ (dağılma özeliği)

(4) $(\lambda\mathbf{u}) \,.\, \mathbf{v} = \lambda\,(\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}) = \mathbf{u}\ (\lambda \,.\, \mathbf{v})$

u ile v arasındaki açının ölçüsü θ ise

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\ \cos\theta$$

dır.



PARALEL VE DİK VEKTÖRLER

TEOREM

u ile v sıfır vektöründen farklı vektörler olsun.

$u \perp v \Leftrightarrow u \,.\, v = 0.$

TEOREM

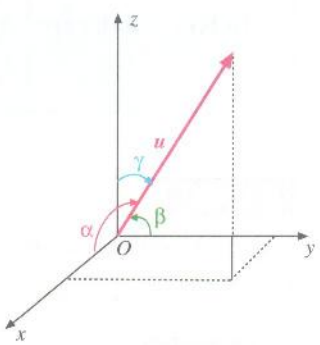
Sıfır vektöründen farklı $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için

$$\mathbf{u} \,//\, \mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

TANIM

Bir $u = (a, b, c)$ vektörünün i , j , k birim vektörleriyle yapmış oldukları α , β , γ açılarının kosinüslerine u vektörünün **doğrultman kosinüsleri** adı verilir.

$$\cos\alpha = \frac{a}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{\|\mathbf{u}\|}$$



VEKTÖREL ÇARPIM

TANIM

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_1, v_3)$ vektörlerinin **vektörel çarpımı**

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2)\,i + (u_3v_1 - u_1v_3)\,j + (u_1v_2 - u_2v_1)\,k$$

vektörüdür.

SONUÇ

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

olur.

TEOREM

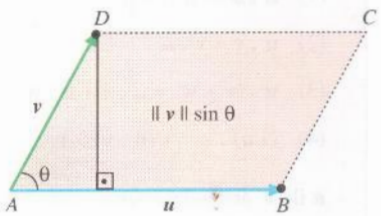
$u \times v$ vektörü hem u, hem v vektörüne diktir.

TEOREM

u ile v vektörleri arasındaki açının ölçüsü θ olsun. $0 \le \theta \le \pi$ olmak üzere,

$$\| u \times v \| = \| u \| \, \| v \| \, |\sin\theta|$$

dır.



KARMA ÇARPIM

TANIM

$a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ uzayda üç vektör olsun. $a.(b \times c)$ sayısına a, b, c sektörlerinin **karma çarpımı** denir, $[a, b, c]$ sembolüyle gösterilir.

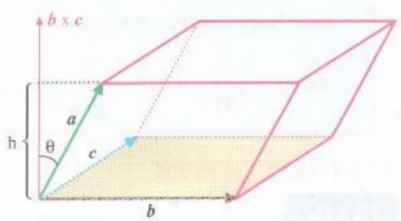
$$[a, b, c] \quad a.(b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ dır.}$$

TEOREM

a, b, c vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = |\, a \,.\, (b \times c) \,| = |\, [a, b, c] \,|$$

birimküptür.



SONUÇ

a, b, c vektörleri aynı düzlemdedir $\Leftrightarrow$ $a \,.\, (b \times c) = 0$.

byns

PROBLEMLER

- Uzayda Vektörler
- İki Nokta Arasındaki Uzaklık
- Vektörel Çarpım

1. Aşağıda verilen A ve B noktaları için $|AB|$ uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $A = (6, 2, -3)$ $B = (0, 0, 0)$

(b) $A = (5, 4, 15)$ $B = (2, 0, 3)$

(c) $A = (1, 4, 5)$ $B = (7, 6, 2)$

2. Uzayda $A(1, -2, -3)$, $B(2, -3, 0)$, $C(3, 1, -9)$, $D(-1, 1, -12)$ noktaları veriliyor.

$|AC|$, $|BD|$ ve $|CD|$ uzunluklarını hesaplayınız.

3. Aşağıdaki noktaların orijine olan uzaklığını hesaplayınız.

(a) $A(-4, 2, 4)$ (b) $B(-4, 6, 12)$

(c) $C(3, -4, 12)$ (d) $D(12, 16, -15)$

4. Köşeleri $A(3, -1, 2)$, $B(0, -4, 2)$ ve $C(-3, 2, 1)$ olan üçgenin ikizkenar üçgen olduğunu gösteriniz.

5. Köşeleri $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$, $C(1, -3, 2)$ olan üçgenin dik üçgen olduğunu gösteriniz.

6. Köşeleri $A(4, -1, 4)$, $B(-1, 7, -2)$, $C(1, -3, 2)$ olan üçgenin bir açısının geniş açı olduğunu gösteriniz.

7. Ox– ekseni üzerinde, $P(-3, 4, 8)$ noktasından 12 birim uzakta olan bir nokta bulunuz.

8. Oy– ekseni üzerinde, $A(1, -3, 7)$ ve $B(5, 7, -5)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan bir nokta bulunuz.

9. Aşağıda verilen $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektörleri için $3\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ ifadelerini hesaplayınız.

(a) $\boldsymbol{u} = (1, -2, 3)$, $\boldsymbol{v} = (5, 1, 15)$

(b) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

10. Aşağıda merkez ve yarıçapı verilen kürenin denklemini yazınız.

(a) $M(1, -2, 3)$, $r = 5$

(b) $M(-1, 2, -4)$, $r = 6$

11. Aşağıda denklemi verilen kürelerin merkez ve yarıçaplarını bulunuz.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y = 0$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 9y + 10z + 40 = 0$

12. Merkezi $M(4, 5, -2)$ olan ve $N(1, 0, 0)$ noktasından geçen kürenin denklemini yazınız.

13. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ve $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ vektörleri veriliyor. $\boldsymbol{b}$ vektörünü, biri $\boldsymbol{a}$ ya paralel biri de $\boldsymbol{a}$ ya dik olan iki vektörün toplamı biçiminde yazınız.

14. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{b} = 8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k}$ vektörleri için 13. soruyu cevaplandırınız.

15. Başlangıç noktası $M(1, 2, -3)$ olan $\boldsymbol{u} = (3, -1, 4)$ vektörünün N bitim noktasının koordinatlarını bulunuz.

16. $\boldsymbol{u} = (12, -15, -16)$ vektörünün doğrultman kosinüslerini bulunuz.

17. Bir vektörün koordinat eksenleriyle yapmış oldukları açıların ölçüleri aşağıdakilerden hangileri olabilir?

(a) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$

(b) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 60°$

(c) $\alpha = 90°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 60°$

(d) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$

byns

18. Bir vektör Ox– ekseniyle 120 derecelik, Oz– ekseniyle 45 derecelik açı yapıyor. Bu vektör Oy– ekseniyle kaç derecelik açı yapar?

19. Boyu 2 birim olan bir $\boldsymbol{u}$ vektörü Ox– ekseniyle 60 derecelik, Oy– ekseniyle 120 derecelik açı yapıyor. Bu vektörün bileşenlerini bulunuz.

20. Koordinat eksenleriyle eşit ölçülü açılar yapan ve boyu 3 birim olan vektörün bileşenlerini bulunuz.

21. $\boldsymbol{u} = (-2, 6, -3)$ vektörüyle ters yönlü olan bir birim vektör bulunuz.

22. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ikişer ikişer dik olan vektörler ve

$\boldsymbol{d} = 5\boldsymbol{a} - 6\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}$ olsun.

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ birer birim vektör olduğunda $\|\boldsymbol{d}\|$ ne olur?

(2) $\|\boldsymbol{a}\| = 2$, $\|\boldsymbol{b}\| = 3$, $\|\boldsymbol{c}\| = 4$ ise $\|\boldsymbol{d}\|$ nedir?

23. Köşeleri $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$ olan üçgenin B açısının ölçüsünü bulunuz.

24. $\boldsymbol{a} = (2, 1, -1)$ vektörüyle aynı yönlü ve

$$\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{x} = 3$$

bağıntısını sağlayan $\boldsymbol{x}$ vektörünü bulunuz.

25. $\boldsymbol{a} = (2, 3, -1)$ ve $\boldsymbol{b} = (1, -2, 3)$ vektörlerinin her ikisine de dik olan ve

$$\boldsymbol{x} \,.\, (2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = -6$$

bağıntısını sağlayan $\boldsymbol{x}$ vektörünü bulunuz.

26. Aşağıdaki vektörlerin vektörel çarpımlarını hesaplayınız.

(1) $\boldsymbol{a} = (2, 4, -3)$, $\boldsymbol{b} = (-1, -2, 5)$

(2) $\boldsymbol{u} = (3, 0, -2)$, $\boldsymbol{v} = (0, -2, 3)$

(3) $\boldsymbol{m} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n} = -5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$

(4) $\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

27. $\|\boldsymbol{a}\| = 10$, $\|\boldsymbol{b}\| = 2$ ve $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = 12$ olduğuna göre $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ ne olur?

28. $\|\boldsymbol{a}\| = 3$, $\|\boldsymbol{b}\| = 26$ ve $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = 72$ ise $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ nedir?

29. Köşeleri $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$ olan üçgenin alanını hesaplayınız.

30. $\boldsymbol{a} = (2, -3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-3, 1, 2)$ ve $\boldsymbol{c} = (1, 2, 3)$ vektörleri için

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

çarpımlarını hesaplayınız.

Vektörel çarpım birleşimli midir?

31. Aşağıda verilen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektörleri aynı düzlemde midir?

(1) $\boldsymbol{a} = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1, 3)$, $\boldsymbol{c} = (1, 9, -11)$

(2) $\boldsymbol{a} = (3, -2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, 2)$, $\boldsymbol{c} = (3, -1, -2)$

(3) $\boldsymbol{a} = (2, -1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, -3)$, $\boldsymbol{c} = (3, -4, 7)$

32. $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ noktalarının aynı düzlemde bulunduğunu gösteriniz.

33. $\boldsymbol{u} = (1, 2, -3)$, $\boldsymbol{v} = (2, 1, 4)$, $\boldsymbol{w} = (3, 0, 1)$ vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmini bulunuz.

34. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

35. İkişer ikişer dik olan $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vektörleri için

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$$

olduğunu gösteriniz.

36. $\boldsymbol{a}$ ile $\boldsymbol{b}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ radyanlık açı yapan iki vektördür.

$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{3}$, $\|\boldsymbol{b}\| = 1$ olduğuna göre $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ile $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ vektörleri arasındaki açının ölçüsünü bulunuz. $\boldsymbol{p}$ ve $\boldsymbol{q}$ vektörlerinin boyunu hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. **(a)** $|AB|^2 = (0-6)^2 + (0-2)^2 + (0+3)^2 = 36 + 4 + 9 = 49 \Rightarrow |AB| = 7$

(b) $|AB|^2 = (2-5)^2 + (0-4)^4 + (3-15)^2 = 9 + 16 + 144 = 169 \Rightarrow |AB| = 13$

(c) $|AB|^2 = (7-1)^2 + (6-4)^2 + (2-5)^2 = 36 + 4 + 9 = 49 \Rightarrow |AB| = 7$

2. $|AC|^2 = (3-1)^2 + (1+2)^2 + (-9+3)^2 = 4 + 9 + 36 = 49 \Rightarrow |AC| = 7$

$|BD|^2 = (-1-2)^2 + (1+3)^2 + (-12+0)^2 = 9 + 16 + 144 = 169 \Rightarrow |BD| = 13$

$|CD|^2 = (-1-3)^2 + (1-1)^2 + (-12+9)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow |CD| = 5$

3. **(a)** $|OA|^2 = (-4-0)^2 + (2+0)^2 + (4-0)^2 = 16 + 4 + 16 = 36 \Rightarrow |OA| = 6$

(b) $|OB|^2 = (-4-0)^2 + (6-0)^2 + (12-0)^2 = 16 + 36 + 144 = 196 \Rightarrow |OB| = 14$

(c) $|OC| = 13$

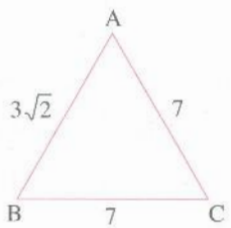
(d) $|OD| = 25$

olduğu benzer biçimde gösterilebilir.

4. $|AB|^2 = (-3)^2 + (-3)^2 + (0)^2 = 18 \Rightarrow |AB| = 3\sqrt{2}$

$|AC|^2 = (-6)^2 + (3)^2 + (1)^2 = 49 \Rightarrow |AC| = 7$

$|BC|^2 = (-3)^2 + (6)^2 + (-1)^2 = 49 \Rightarrow |BC| = 7$



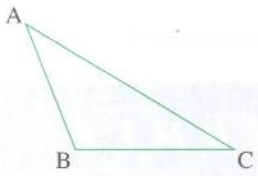
Buna göre, $|AC| = |BC|$ ve dolayısıyla $\overset{\triangle}{ABC}$ ikizkenardır.

5. $\left.\begin{array}{l} |AB|^2 = (-4)^2 + (8)^2 + (-8)^2 = 144 \\ |AC|^2 = (-2)^2 + (2)^2 + (-4)^2 = 24 \\ |BC|^2 = (2)^2 + (-10)^2 + (-4)^2 = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow |AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$

olduğundan ABC üçgeni dik üçgendir.

byns

6. $\left.\begin{array}{l} |AB|^2 = 5^2 + 8^2 + 6^2 = 125 \\ |AC|^2 = 3^2 + 4^2 + 2^2 = 29 \\ |BC|^2 = 2^2 + 4^2 + 4^2 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow |AC|^2 > |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow m(\hat{B}) > 90°$

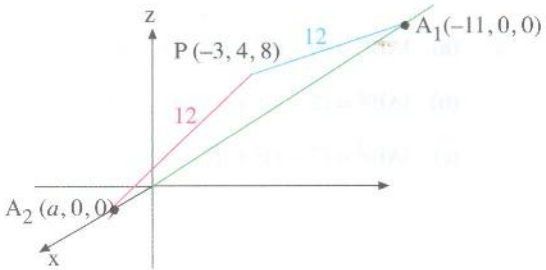


7. Ox- ekseni üzerindeki söz konusu nokta A $(a, 0, 0)$ olsun.

$|AP| = 12 \Rightarrow (a+3)^2 + 16 + 64 = 144 \Rightarrow (a+3)^2 = 64 \Rightarrow$

$a + 3 = \pm 8 \Rightarrow a_1 = -11, \quad a_2 = 5 \Rightarrow$

$A_1(-11, 0, 0), \quad A_2(5, 0, 0)$ istenen noktalardır.



8. Oy- ekseni üzerindeki nokta P $(0, b, 0)$ olsun.

$|AP| = |BP| \Rightarrow |AP|^2 = |BP|^2 \Rightarrow 1 + (b+3)^2 + 49 = 25 + (b-7)^2 + 25 \Rightarrow$

$(b+3)^2 = (b-7)^2 \Rightarrow b + 3 = -b + 7 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow P(0, 2, 0)$ istenen noktadır.

9. a) $\mathbf{u}=(1,-2,3), \mathbf{v}=(5,1,15) \Rightarrow 3\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3,-6,9) + (5,1,15) = (8,-5,24), \quad \mathbf{u}.\mathbf{v} = 5 - 2 + 45 = 48$

$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(4,-3,-12)\| = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = 13$

b) $\mathbf{u}=(1,1,1), \mathbf{v} = (0.1,-1), \quad 3\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3,3,3) + (0,1,-1) = (3,4,2), \quad \mathbf{u}.\mathbf{v} = 0 + 1 - 1 = 0$

$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(1,0,2)\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

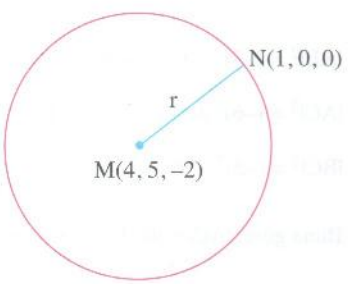
10. a) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 25$, b) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2 = 36$

11. a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0 \Rightarrow$

$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) + 5 = 0 \Rightarrow$

$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 5 = 0 \Rightarrow$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9 \Rightarrow$ Merkez M(1, –2, 3), yarıçap r = 3.



12. $r^2 = |MN|^2 = 3^2 + 5^2 + 2^2 = 38 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 38$

$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y + 4z + 7 = 0$

13. $\boldsymbol{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$

$\mathbf{u} = (p, q, r)$, $\boldsymbol{a}$ vektörüne dik bir vektör olmak üzere $\mathbf{b} = \lambda\boldsymbol{a} + \mathbf{u}$ olacaktır.

$\mathbf{a}.\mathbf{u} = 0 \Rightarrow (1,1,0).(p,q,r) = 0 \Rightarrow p + q = 0 \Rightarrow q = -p$ olur.

$\mathbf{b} = \lambda(1,1,0) + (p,-p,r) \Rightarrow (0,3,4) = (\lambda,\lambda,0) + (p,-p,r) \Rightarrow (0,3,4) = (\lambda+p, \lambda-p, r) \Rightarrow$

$\lambda + p = 0, \quad \lambda - p = 3, \quad r = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}, \quad p = -\frac{3}{2}$ olacağından $(0,3,4) = \frac{3}{2}(1,1,0) + \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 4\right)$ yazılabilir.

14. 13. soruya benzer biçimde çözülür.

15. N (a, b, c) için $\mathbf{MN} = (a-1, b-2, c+4)$ olur. $\mathbf{MN} = (3, -1, 4)$ olduğundan

$a-1=3,\ b-2=-1,\ c+3=4 \Rightarrow a=4,\ b=1,\ c=1$ bulunur. Bitim noktası N (4, 1, 1) dir.

16. $\|\mathbf{u}\|^2 = 12^2 + (-15)^2 + (-16)^2 = 625 \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = 25, \quad \cos\alpha = \frac{12}{25}, \quad \cos\beta = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}, \quad \cos\gamma = -\frac{16}{25}.$

17. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ olmalıdır.

(a) $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 120° = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ olacağından açıların ölçüleri 45°, 60°, 120° olabilir.

(b) $\cos^2 45° + \cos^2 135° + \cos^2 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \neq 1$ olduğundan, açıların ölçüleri 45°, 135°, 60° olamaz.

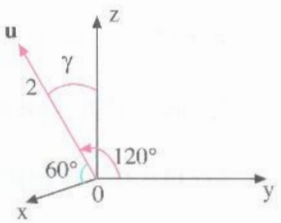
18. $\cos^2 120° + \cos^2 45° + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\beta = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60°$ veya $\beta = 120°$ dir.

19. $\cos^2 60° + \cos^2 120 + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \cos^2\gamma \Rightarrow$

$\cos^2\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = 45°$

$\mathbf{u}_x = 2\cos 60° = 2.\frac{1}{2} = 1, \quad \mathbf{u}_y = 2\cos 120° = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$\mathbf{u}_z = 2.\cos 45° = 2.\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ *olur.*



20. $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z = 3.\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{u} = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ *veya* $\mathbf{u} = \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$

21. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7, \qquad \mathbf{v} = -\frac{1}{7}\mathbf{u} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right)$

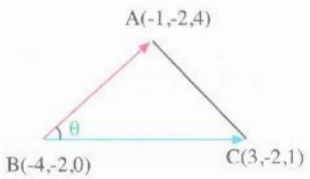
22. (1) $\|\mathbf{d}\|^2 = \mathbf{d}.\mathbf{d} = (5\boldsymbol{a} - 6\mathbf{b} + 3\mathbf{c}).(5\boldsymbol{a} - 6\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) = 25\|\boldsymbol{a}\|^2 + 36\|\mathbf{b}\|^2 + 9\|\mathbf{c}\|^2$

$= 25.1 + 36.1 + 9.1 = 70 \Rightarrow \|\mathbf{d}\| = \sqrt{70}$

(2) $\|\mathbf{d}\|^2 = 25.4 + 36.9 + 9.4 = 100 + 324 + 36 = 460 \Rightarrow \|\mathbf{d}\| = 2\sqrt{105}$

23. $\mathbf{BA} = (3,0,4), \quad \mathbf{BC} = (7,0,1)$

$\mathbf{BA}.\mathbf{BC} = \|\mathbf{BA}\|\|\mathbf{BC}\|\cos\theta \Rightarrow 21 + 4 = 5.\sqrt{50}.\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45°$



24. $x = \lambda a = (2\lambda, \lambda, -\lambda)$

$a.x = (2,1,-1).(2\lambda,\lambda,-\lambda) = 3 \Rightarrow 4\lambda + \lambda + \lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

25. $a \times b = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = 7(1, -1, -1)$

$x = \lambda(1,-1,-1)$ biçimindedir. Buna göre $\lambda(1,-1,-1).(2,-1,1) = -6 \Rightarrow \lambda(2+1-1) = -6 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow x = (-3, 3, 3)$.

26. (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} - 7\mathbf{j} = (14,-7,0)$

(2) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = (-4,-9,-6)$

(3) $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ -5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 24\mathbf{i} - 24\mathbf{k} = (24,0,24)$

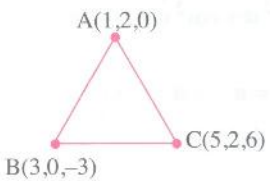
27. $a.b = 12 \Rightarrow \|a\|\|b\|\cos\theta = 12 \Rightarrow 10.2.\cos\theta = 12 \Rightarrow \cos\theta = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{5}$ olur.

$\|a \times b\| = \|a\|\|b\||\sin\theta| = 10.2.\frac{4}{5} = 16$

28. $\|a \times b\| = 72 \Rightarrow \|a\|\|b\||\sin\theta| = 72 \Rightarrow 3.26|\sin\theta| = 72 \Rightarrow |\sin\theta| = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{13}$ olur.

$a.b = \|a\|\|b\|\cos\theta = 3.26.\frac{5}{13} = 30$ olur.

29. $\mathbf{AB} = (2,-2,-3), \quad \mathbf{AC} = (4,0,6)$



$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = -4(3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

$\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = 4\sqrt{4+36+4} = 4.7 = 28$

$Alan\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = \frac{1}{2}.28 = 14\,br^2$

30. $a \times b = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = 7(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -7(1,1,1)$

$(a \times b) \times c = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & -7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -7(1,-2,1),$

$b \times c = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = (-1, 11, -7)$

$a \times (b \times c) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 11 & -7 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 19\mathbf{k} = (10, 12, 19)$

olduğundan $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$ dir. O halde vektörel çarpım birleşimli değildir.

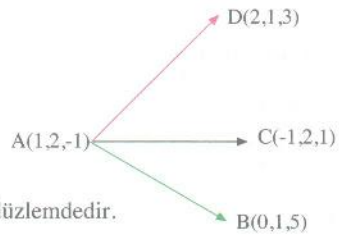
31. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aynı düzlemdedir. $\Leftrightarrow [\,\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\,] = 0$

(1) $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2(11-27) - 3(-11-3) - 1(9-1) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ vektörleri aynı düzlemdedir.

(2) $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3.0 + 2(-10) + 1(-5) = -25 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ vektörleri aynı düzlemde değildir.

32. $\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}$ vektörlerinin aynı düzlemde olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathbf{AB} = (-1,-1,6), \quad \mathbf{AC} = (-2,0,2), \quad \mathbf{AD} = (1,-1,4)$



$[\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1(2) + 1(-10) + 6(2) = 0 \;\Rightarrow\; A, B, C, D$ noktaları aynı düzlemdedir.

33. $V = |\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = |[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |1.1 + 2.10 - 3(-3)| = 6$ *birimküp.*

34. a) $\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3), \; \mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3), \; \mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3)$ *olsun.*

$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = (a_2b_3 - b_2a_3)\mathbf{i} + (b_1a_3 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}$ olduğundan

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \left[a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\right]\mathbf{i} + \left[a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)\right]\mathbf{j}$$
$$+ \left[a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\right]\mathbf{k}$$

olur. Diğer taraftan

$(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$ ifadesinde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektörleri bileşenleri cinsinden yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa yukarıdaki sonuç bulunur.

35. $\mathbf{a}.\mathbf{c} = 0$ ve $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$ olacağından $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c} = 0 - 0 = 0$ bulunur.

36. $\mathbf{p}.\mathbf{q} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2 = 3 - 1 = 2$

$\|\mathbf{p}\|^2 = \mathbf{p}.\mathbf{p} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\mathbf{a}.\mathbf{b} = 3 + 1 + 2\sqrt{3}.1\cos\frac{\pi}{6} = 4 + 2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 3 = 7 \;\Rightarrow\; \|\mathbf{p}\| = \sqrt{7}$

olur. Benzer şekilde

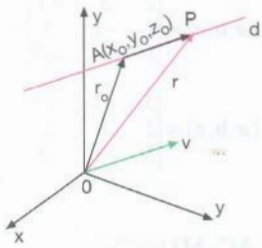
$\|\mathbf{q}\|^2 = \mathbf{q}.\mathbf{q} = (\mathbf{a}-\mathbf{b}).(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\mathbf{a}.\mathbf{b} = 3 + 1 - 3 = 1 \;\Rightarrow\; \|\mathbf{q}\| = 1$

bulunur.

$\mathbf{p}.\mathbf{q} = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|\cos\theta \;\Rightarrow\; 2 = \sqrt{7}.1.\cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{7}} \;\Rightarrow\; \theta = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$ olur.

UZAYDA DOĞRU DENKLEMİ

Verilen Bir Noktadan Geçen ve Verilen Bir Vektöre Paralel olan doğrunun Denklemi



vektörel denklemi

$r = r_0 + tv$

kartezyen denklemi

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

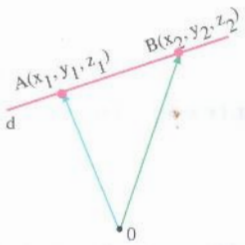
parametrik denklem

$x = x_0 + at$

$y = y_0 + bt$

$z = z_0 + ct$

İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

İki Doğrunun Paralel Olma Şartı

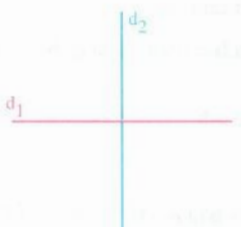
$d_1 \,//\, d_2 \Leftrightarrow \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$

d_1 ——— $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$

d_1 ——— $\frac{x - x_2}{p} = \frac{y - y_2}{q} = \frac{z - z_2}{r}$

İki Doğrunun Dik Olma Şartı

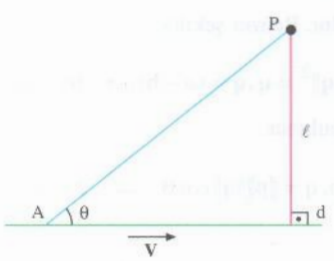
$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow ap + bq + cr = 0$



Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı

$$\ell = \frac{\|AP \times v\|}{\|v\|}$$

(**V**, doğrunun doğrultmanı)



www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

PROBLEMLER

- Uzayda Doğru Denklemleri
- Dik ve Paralel Doğrular
- Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı

1. Aşağıda verilen noktadan geçen ve verilen vektöre paralel olan doğrunun kartezyen denklemini yazınız.

(a) $A(1,3,-2)$, $v = (2,4,5)$

(b) $A(-3,2,5)$, $v = (-1,2,3)$

(c) $A(5,4,2)$, $v = (1,3,0)$

(d) $A(3,-4,-1)$, $v = i + j + k$

2. Aşağıda iki noktası verilen doğruların parametrik ve kartezyen denklemini yazınız.

(a) $A(1,4,3), B(-1,2,5)$

(b) $A(3,2,1), B(4,3,2)$

(c) $A(1,2,2), B(3,-1,3)$

(d) $A(3,5,7), B(6,5,4)$

3. $A(2,3,-5)$ noktasından geçen ve denklemi

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$$

olan doğruya paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

4. $A(2,-1,5)$ noktasından geçen ve parametrik denklemi

$$x = 3t, \quad y = 2 + t, \quad z = 2 - t$$

olan doğruya paralel olan doğrunun denklemini yazınız.

5. $A(-3,2,-3)$ ve $B(1,-1,4)$ noktalarını birleştiren $[AB]$ doğru parçasının parametrik denklemini yazınız.

6. Orijinden geçen ve koordinat eksenleriyle $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$ ölçülü açılar yapan doğrunun parametrik ve kartezyen denklemini yazınız.

7. Aşağıda verilen noktaların karşılarında denklemi verilen doğrulara olan uzaklığını hesaplayınız.

(a) $A(1,1,5)$; $x - 1 = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{2}$

(b) $A(1,-1,-2)$; $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{-2}$

(c) $A(2,3,-1)$; $x = t + 1,\ y = t + 2,\ z = 4t + 13$

(d) $A(2,1,3)$; $x = 2 + 2t, y = 1 + 6t, z = 3$

(e) $A(-1,4,3)$; $x = 10 + 4t, y = -3,\ z = 4t$

8. $\dfrac{x+1}{n} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ ve $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2m} = z + 2$ denklemli doğruların paralel olması için m ile n arasında hangi bağıntı olmalıdır?

9. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{k} = \dfrac{z+3}{-1}$, $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+5}{7}$ denklemli doğruların dik olması için k ne olmalıdır?

10. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-4}{3}$, $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+5}{-4}$ denklemli doğrular kaç derecelik açı yaparlar?

11. $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ doğrusu xOy– düzlemini hangi noktada keser?
[xOy– düzleminde $z = 0$ olduğunu düşününüz.

12. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2}$ ve $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{2}$ denklemli doğrular hangi noktada kesişirler?

13. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$, $\dfrac{x-3}{m} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$ denklemli doğruların kesişmesi için m ne olmalıdır?

☞ ÇÖZÜMLER

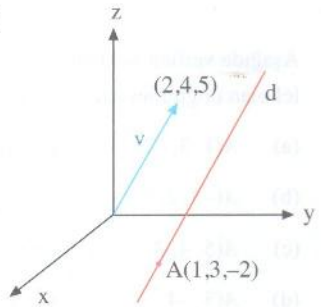
1. a. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+2}{5}$

b. $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-5}{3}$

c. $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-4}{3}$, $z-2=0$

d. $x-3=y+4=z+1$

(a)



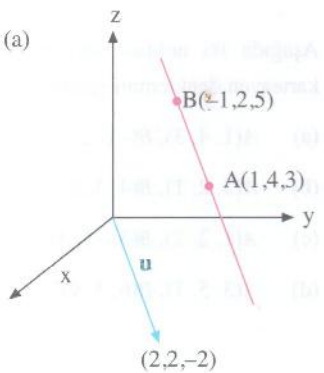
2. a. $\mathbf{u}=(2,2,-2)$

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{-2}\Rightarrow x-1=y-4=-z-3=t$

denirse, doğrunun parametrik denklemi

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+4 \\ z=-t-3 \end{cases}$$ olur.

(a)



b. $\mathbf{u}=(-1,-1,-1)$. Kartezyen denklem

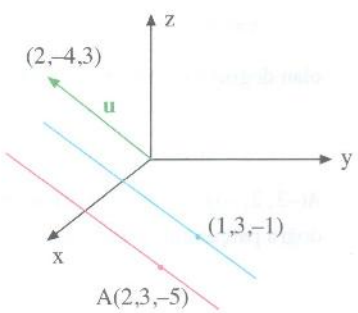
$\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}\Rightarrow x-3=y-2=z-1$ *olur.*

z=t denirse x = t+2, y = t+1 bulunur. O halde bir

parametrik denklem

$$\begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=t \end{cases}$$ olur.

c. ve d. benzer biçimde bulunur.



3. Doğrultman vektörü $\mathbf{u}=(2,-4,3)$ olduğundan,

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{3}$$

istenen doğru denklemidir.

4. $\mathbf{u}=(3,1,-1)$

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

5. Doğrultman vektörü $\mathbf{u} = (4, -3, 7)$ dir. A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{7}$$

olur. (z+3)/7 = t denirse $x = 4t-3$, $y = -3t+2$ olur. $4t-3 = -3 \Rightarrow t = 0$ ve $4t-3 = 1 \Rightarrow t = 1$ bulunur.

O halde [AB] doğru parçasının bir parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = 4t - 3 \\ y = -3t + 2 \qquad 0 \le t \le 1 \\ z = 7t - 3 \end{cases}$$

olacaktır.

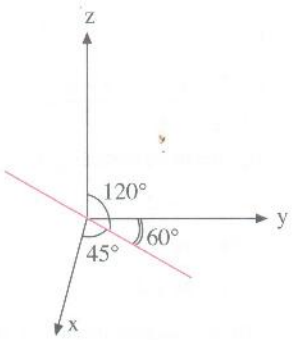
6. $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ doğrultmanı yerine

$\mathbf{v} = 2\mathbf{u} = \left(\sqrt{2}, 1, -1\right)$ alınabilir. Doğrunun denklemi

$$\frac{x-0}{\sqrt{2}} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-1} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}y = -\sqrt{2}z$$

olur.

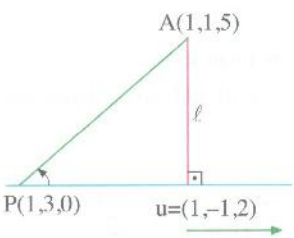


7. a. $\ell = \|\boldsymbol{PA}\| \sin\theta = \|\boldsymbol{PA}\| \frac{\|\boldsymbol{PA} \times \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{AP}\| \|\boldsymbol{u}\|} = \frac{\|\boldsymbol{PA} \times \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|}$

olur. $\boldsymbol{PA} = (0, -2, 5)$ ve $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

olacağından

$$\ell = \frac{\|\boldsymbol{PA} \times \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} = \frac{\|\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5} \text{ birimdir.}$$



c. A(2,3,–1), $\mathbf{v} = (1, 1, 4)$ olur. Doğrunun bir noktası P (1, 2, 13) dir. $\mathbf{PA} = (1,1,-14)$ için

$$\boldsymbol{PA} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -14 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18\mathbf{i} - 18\mathbf{j} \Rightarrow \|\boldsymbol{PA} \times \mathbf{v}\| = 18\sqrt{2}$$

bulunur. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{18}$ olduğundan $\ell = \frac{18\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{18}{3} = 6$ birim olur.

d. A(2,1,3), P(2,1,3), $\mathbf{v} = (2,6,0)$. $\mathbf{PA} = (0,0,0)$ olacağından A doğru üzerindedir. Dolayısıyla uzaklık sıfırdır.

8. $\frac{n}{3} = \frac{1}{2m} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2mn = 3$

9. $(2, k, -1) \cdot (3, 1, 7) = 0 \Rightarrow 6 + k - 7 = 0 \Rightarrow k = 1$ olmalıdır.

10. $\mathbf{u} = (1, 4, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 2, -4) \Rightarrow \mathbf{u}.\mathbf{v} = 4 + 8 - 12 = 0 \Rightarrow$ doğrular diktir.

11. $z = 0$ *için* $\frac{x-6}{3} = -3 \Rightarrow x = -3$, $\frac{y+4}{2} = -3 \Rightarrow y = -10$. $P(-3,-10,0)$

12. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = t \Rightarrow x = t, y = 3t, z = 2t$

$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2} = s \Rightarrow x = s+2, \quad y = 4s+3, \quad z = 2s+4$

Doğruların kesişmesi için

$t = s + 2$

$3t = 4s + 3$

$2t = 2s + 4$

eşitlikleri sağlanmalıdır. İlk iki denklemden

$t - s = 2$

$3t - 4s = 3$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse $t = 5$, $s = 3$ bulunur. Bu iki değer üçüncü denklemde yerine yazılırsa

$2.5 = 2.3 + 4$

bulunur ki bu $t = 5$, $s = 3$ köklerinin her üç denklemi sağladığını gösterir. t ve s nin bu değerleri için $x = 5$, $y = 15$, $z = 10$ bulunur. O halde doğrular $(5, 15, 10)$ noktasında kesişirler.

13.

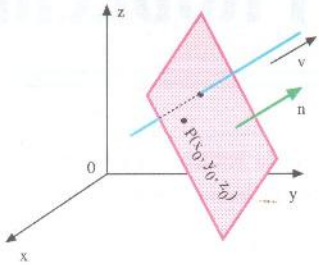
$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} = t, \qquad \frac{x-3}{m} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2} = s$

$$\begin{cases} x = 2t-2 \\ y = -3t \\ z = 4t+1 \end{cases} \text{ve} \begin{cases} x = ms+3 \\ y = 4s+1 \\ z = 2s+7 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4s+1 = -3t \\ 2s+7 = 4t+1 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 1, \; s = -1$$

bulunur. Bu değerler 2t–2 = ms+3 denklemini sağlamalıdır. 2.1 – 2 = m.(–1)+3 $\Rightarrow$ m = 3 olmalıdır.

DÜZLEM DENKLEMİ

Verilen Bir Noktadan Geçen ve Verilen Bir Doğruya Dik olan Düzlemin Denklemi



$P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve

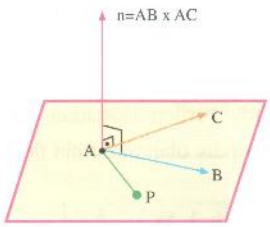
$$d\ldots \quad \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

doğrusuna dik düzlemin denklemi

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

olur.

Üç Noktası verilen düzlemin denklemi

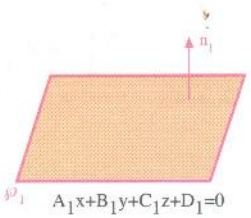


A,B, C noktalarından geçen düzlemin denklemi

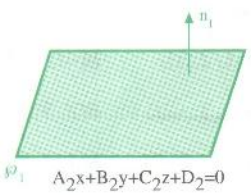
$$[AP, AB, AC] = 0$$

dır. Burada P(x, y, z) düzlemin bir temsilci noktasıdır.

İki Düzlemin paralel Olması Şartı



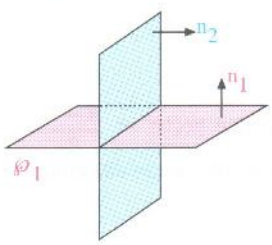
$$\wp_1 \parallel \wp_2 \iff \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$



UYARI

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ ise düzlemler çakışık olur.

İki Düzlemin Dik Olma Şartı



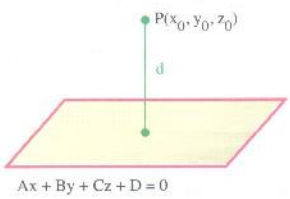
$\wp_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\wp_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

denklemli düzlemler için

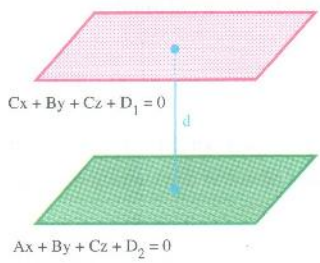
$$\wp_1 \perp \wp_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Bir Noktanın Bir Düzleme Olan Uzaklığı



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Paralel İki Düzlem Arasındaki Uzaklık



$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

PROBLEMLER

- Uzayda Düzlem Denklemi
- Dik ve Paralel Düzlemler
- Bir Noktanın Bir Düzleme Olan Uzaklığı

1. Aşağıda verilen noktadan geçen ve verilen vektöre dik olan düzlemin denklemini yazınız.

(a) $A(1,1,1)$, $\boldsymbol{n} = (1,1,1)$

(b) $B(1,3,5)$, $\boldsymbol{n} = (1,-2,3)$

(c) $C(2,4,3)$, $\boldsymbol{n} = (1,5,6)$

2. Aşağıda verilen noktadan geçen ve denklemi verilen doğruya dik olan düzlemin denklemini yazınız.

(a) $A(1,3,5)$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$

(b) $B(2,1,1)$, $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{4}$

(c) $C(2,3,4)$, $x = 1+t$, $y = 3+2t$, $z = 5t$

3. Aşağıda verilen üç noktanın belirttiği düzlemin denklemini yazınız.

(a) $A(1,2,3)$, $B(-1,4,2)$, $C(0,6,4)$

(b) $A(1,3,-2)$, $B(2,3,4)$, $C(1,1,6)$

(c) $A(-1,-2,0)$, $B(1,3,5)$, $C(2,1,1)$

(d) $O(0,0,0)$, $P(1,1,1)$, $Q(1,-1,3)$

4. Orijinden geçen ve $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{4}$ doğrusunu içinde bulunduran düzlemin denklemini bulunuz.

5. k nın hangi değeri için $2x - 3y + 5z = 10$, $2x + ky - 8z = 10$ denklemli düzlemler birbirine dik olurlar?

6. Orijinden geçen ve $3x + 4y - z = 10$ düzlemine paralel olan düzlemin denklemini yazınız.

7. $2x + y + z = 4$ ve $3x - y + z = 3$ düzlemlerinin arakesiti olan doğrunun denklemini bulunuz.

8. Problem 7'de verilen doğruya paralel olan ve $P(3,3,1)$ noktasından geçen doğrunun kartezyen denklemini bulunuz.

9. Aşağıda verilen noktaların, karşılarında denklemi yazılı düzleme olan uzaklığını hesaplayınız.

(a) $A(2,3,1)$; $2x - 3y + 6z - 6 = 0$

(b) $B(-1,2,1)$; $3x - 4y + 12z + 8 = 0$

(c) $O(0,0,0)$; $x + y + z = 10$

(d) $P(5,12,13)$; $3x + 4y + 5z = 12$

10. Aşağıda denklemleri verilen paralel düzlemler arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

(a) $2x - 3y + 6z + 10 = 0$, $2x - 3y + 6z + 3 = 0$

(b) $3x - 4y + 12z - 8 = 0$, $-6x + 8y - 24z - 10 = 0$

11. Aşağıda denklemleri verilen düzlem çiftlerinin oluşturdukları açıların ölçülerini hesaplayınız.

(a) $x + y = 1$, $2x + y - 2z = 2$

(b) $5x + y - z = 10$, $x - 2y + 3z = 1$

[İki düzlem arasındaki açı, onların normalleri arasındaki açı olarak tanımlanır.]

12. Aşağıda denklemleri yazılı doğruların karşılarında yazılı düzlemleri kestiği noktanın koordinatlarını bulunuz.

(a) $x = 1 - t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$; $2x - y + 3z = 6$

(b) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z}{3}$; $x + y + z = 2$

(c) $x = 1 - t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3t$, $2x + y - z = 8$

13. Orijinden ve $A(1,1,1)$ noktasından geçen, ayrıca $2x + 3y + z = 12$ denklemli düzlemi dik kesen düzlemin denklemini yazınız.

☞ ÇÖZÜMLER

1. **a)** A(1,1,1), **n**=(1,1,1). Düzlemin denklemi $x + y + z + D = 0$ biçiminde olacaktır. A(1,1,1) noktası düzlem üzerinde bulunacağından $1 + 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3$ olur. İstenen denklem $x + y + z = 3$ tür.

b) B(1, 3, 5), $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ olacağından düzlemin denklemi $x - 2y + 3z + D = 0$ biçiminde olacaktır.

$1 - 2.3 + 3.5 = D = 0 \Rightarrow D = -10 \Rightarrow x - 2y + 3z = 10$ istenen denklemdir.

c) C (2, 4, 3), $n = (2, 3, -1)$. $x + 5y + 6z + D = 0 \Rightarrow$

$2 + 20 + 18 + D = 0 \Rightarrow D = -40 \Rightarrow x + 5y + 6z = 40.$

2. **a)** A(1,3,5), $\mathbf{n} = (2, 3, -1)$.

$2x + 3y - z + D = 0 \Rightarrow 2 + 9 - 5 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow 2x + 3y - z = 6$

b) B(2, 1 1), $\mathbf{n} = (2, 3, 4)$

$2x + 3y + 4z + D = 0 \Rightarrow 4 + 3 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = -11 \Rightarrow 2x + 3y + 4z = 11$

c) C(2, 3, 4), $\mathbf{n} = (1, 2, 5)$

$x + 2y + 5z + D = 0 \Rightarrow 2 + 6 + 20 + D = 0 \Rightarrow D = -28 \Rightarrow x + 2y + 5z = 28.$

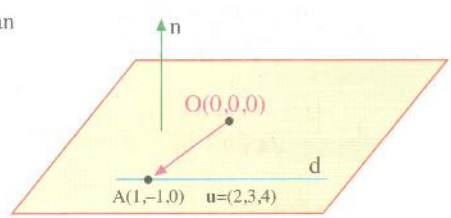
3. **a)** $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y - 2z + 2 = 0$

b) $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 4y - z + 4 = 0$

c. ve **d.** benzer biçimde hesaplanır.

4. **OA** ve $\mathbf{u} = (2, 3, 4)$ vektörlerine dik olan vektör düzlemin bir normali olacağından

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$



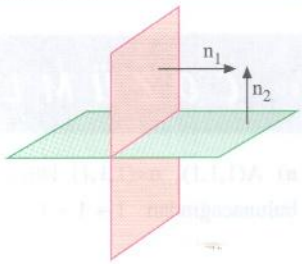
vektörü normal olarak alınabilir. Buna göre düzlemin denklemi

$-4x - 4y + 5z + D = 0$ biçimindedir. Düzlem orijinden geçtiğinden $D = 0$ dır. İstenen denklem $4x + 4y - 5z = 0$ olur.

5. Düzlemler dikse normaller diktir.

$(2,-3,5).(2,k,-8)=0 \Rightarrow 4-3k-40=0 \Rightarrow k=-12$

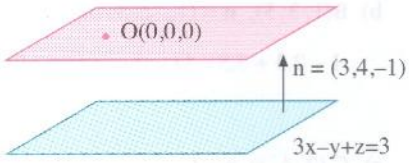
bulunur.



6. Orijinden geçen düzlemin normali de $n=(3,4,-1)$ olacağından, istenen düzlem denklemi

$$3x+4y-z=0$$

olur.

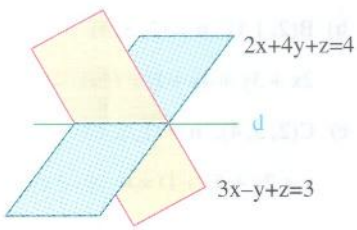


7. $z=t$ diyelim.

$$\left.\begin{aligned}2x+y&=4-t\\3x-y&=3-t\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{7}{5}-\frac{2}{5}t,\ y=\frac{6}{5}-\frac{9}{5}t$$

bulunur. Arakesit doğrusunun parametrik denklemi

$$\begin{cases}x=\dfrac{7}{5}-\dfrac{2}{5}t\\ y=\dfrac{6}{5}-\dfrac{9}{5}t\\ z=t\end{cases}$$ olur. Kartezyen denklemi



$$\frac{x-\frac{7}{5}}{-\frac{2}{5}}=\frac{y-\frac{6}{5}}{-\frac{9}{5}}=z \Rightarrow \frac{5x-7}{-2}=\frac{5y-6}{-9}=z \text{ olur.}$$

8. Problem 7'deki doğruların doğrultmanı $\mathbf{n}=\left(-\frac{2}{5},-\frac{9}{5},1\right)=\frac{1}{5}(-2,-9,5)$ dir. Denklemi istenen doğrunun doğrultmanı, **n** vektörüne paralel herhangi bir vektör olacaktır. Dolayısıyla (–2, –9, 5) alınabilir. Bu durumda istenen denklem

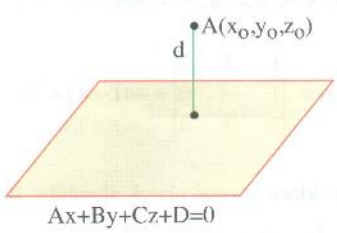
$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-9}=\frac{z-1}{5}$$

olur.

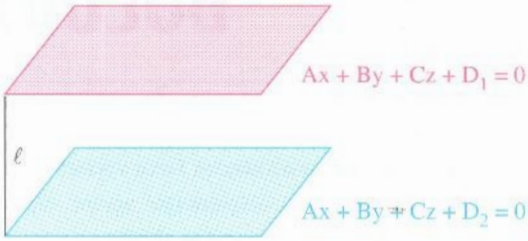
9. a) $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$d=\dfrac{|2.2-3.3+6.1-6|}{\sqrt{4+9+36}}=\dfrac{5}{7}$ birim

b) $d=\dfrac{|3(-1)-4.2+12.1+8|}{\sqrt{9+16+144}}=\dfrac{9}{13}$ birim



10. a) $\ell = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|10-3|}{\sqrt{4+9+36}} = \dfrac{7}{7} = 1$ birim

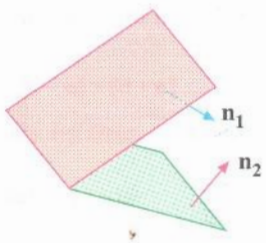


b) $\left.\begin{matrix} 3x-4y+12z-8=0 \\ -6x+8y-24z-10=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 3x-4y+12z-8=0 \\ 3x-4y+12z+5=0 \end{matrix}$

$\ell = \dfrac{|-8-5|}{\sqrt{9+16+144}} = \dfrac{13}{13} = 1$ birim

11. Düzlemler arasındaki açı, normaller arasındaki açıdır..

a. $\mathbf{n}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{n}_2 = (2,1,-2)$

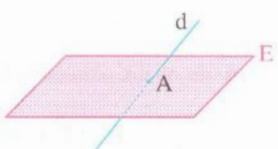


$\mathbf{n}_1 . \mathbf{n}_2 = 2+1+0 = 3$, $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{n}_1 . \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\|\|\mathbf{n}_2\|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45° \Rightarrow \theta = 45°$

b. $\mathbf{n}_1 = (5, 1, -17)$, $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 3) \Rightarrow \mathbf{n}_1 . \mathbf{n}_2 = 5 - 2 - 3 = 0 \Rightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Rightarrow \theta = 90°$

12. a. $2x - y + 3z = 6 \Rightarrow 2(1-t) - (3t) + 3(1+t) = 6 \Rightarrow$

$2 - 2t - 3t + 3 + 3t = 6 \Rightarrow t = \dfrac{5}{2}$



$x = 1 - t = 1 - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{3}{2}$, $y = 3t = \dfrac{15}{2}$, $z = 1 + t = 1 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{7}{2}$

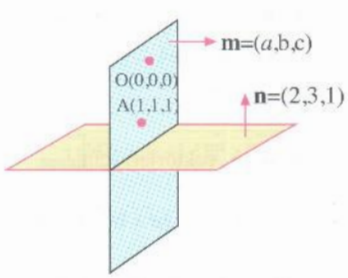
Kesim noktası $A\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{15}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ olur.

b. Doğrunun parametrik denklemi $x = 1 + 2t$, $y = 1 + 5t$, $z = 3t$ dir.

$x + y + z = 2 \Rightarrow 1 + 2t + 1 + 5t + 3t = 2 \Rightarrow 10t + 2 = 2 \Rightarrow t = 0$ olur.

$x = 1 + 2t = 1$, $y = 1 + 5t = 1$, $z = 3t = 0$ bulunur. Kesim noktası A (2, 0, 0) dır.

13. Denklemi istenen düzlemin normali $\mathbf{m} = (a, b, c)$ ise denklemi $ax + by + cz = 0$ dır, zira O(0,0,0) noktasından geçmektedir. A(1,1,1) noktası düzlemde bulunduğundan



$a + b + c = 0$

olur. $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ olacağından

$\mathbf{m}.\mathbf{n} = 0 \Rightarrow 2a + 3b + c = 0$

olacaktır.

$\left.\begin{matrix} a+b+c=0 \\ 2a+3b+c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = -2b,\ c = b$

bulunur. Düzlemin denklemi

$-2bx + by + bz = 0 \Rightarrow -2x + y + z = 0$

olarak bulunur.

byns

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. a ile b, sıfır vektöründen farklı vektörler ve θ, a ile b vektörlerinin oluşturduğu açının ölçüsü olsun. Aşağıdaki önermelerin doğru olduklarını gösteriniz.

   (a) $\|a+b\| > \|a-b\| \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$

   (b) $\|a+b\| > \|a-b\| \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$

   (c) $\|a+b\| < \|a-b\| \Rightarrow \theta > \frac{\pi}{2}$

2. Her $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektörleri için, **üçgen eşitsizliği** denilen

   $$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le |\,\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|\,|$$

   eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

   $$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \ge |\,\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{v}\|\,|$$

   bağıntısının varlığını gösteriniz.

3. $\mathbf{u}$ ile $\mathbf{v}$ dik olduklarında, Pisagor bağıntısı denilen

   $$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

   eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

4. Her $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektörleri için

   $$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right)$$

   olduğunu gösteriniz.

5. a, b, c aralarında 60 derecelik açı olan üç vektördür. $\|a\| = 4$, $\|\mathbf{b}\| = 2$, $\|\mathbf{c}\| = 6$ birim ise $\|a+\mathbf{b}+\mathbf{c}\|$ kaç birimdir?

6. a ve b vektörleri için

   $$\|a\times\mathbf{b}\|^2 = \|a\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (a.\mathbf{b})^2$$

   olduğunu gösteriniz. a ve b nin hangi durumunda

   $$\|a\times\mathbf{b}\|^2 = \|a\|^2\ \|\mathbf{b}\|^2$$

   olur?

7. $a+b+c=0$ bağıntısını sağlayan a, b, c vektörleri için

   $$a\times b = b\times c = c\times a$$

   olacağını gösteriniz.

8. a, b, c vektörleri için

   $$[a, b, c] \le \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c}\|$$

   olacağını gösteriniz. Hangi durumda eşitlik vardır?

9. Her a, b, c vektörleri için

   $$[a+b,\ b+c,\ c+a] = 2\,[a, b, c]$$

   olacağını gösteriniz.

10. Her λ ve μ reel sayıları için

    $$[a, b, (c+\lambda a+\mu b)] = [a, b, c]$$

    olacağını gösteriniz.

11. $a\times b + b\times c + c\times a = \mathbf{0}$ bağıntısını sağlayan a, b, c vektörlerinin aynı düzlemde bulunduklarını gösteriniz.

12. Verilen dört noktanın aynı düzlemde bulunması şartını belirtiniz.

13. $u+v$ vektörünün u ile v vektörlerinin oluşturduğu açının açıortayı olması için u ile v arasında hangi bağıntı olmalıdır?

14. $\mathbf{c} = \dfrac{\|\mathbf{b}\|a + \|a\|\mathbf{b}}{\|a\| + \|\mathbf{b}\|}$ vektörünün a ile b arasındaki açının açıortayı olduğunu gösteriniz.

15. Sıfırdan farklı öyle a, b, c vektörleri bulunuz ki

    $a\times b = a\times c$ ve $b \ne c$ olsun.

byns

16. B ve C bir L doğrusunun iki noktası ve A bu doğru üzerinde olmayan bir nokta olsun. A noktasının L doğrusuna olan uzaklığının

$$d = \frac{\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\|}{\|\mathbf{BC}\|}$$

olacağını gösteriniz. Bundan yararlanarak, köşeleri

$A(1, 0, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(-3, 1, 4)$ olan üçgenin alanını hesaplayınız.

17. $A(1, 0, 1)$ noktasının $P(2, 3, 1)$, $Q(3, -1, 4)$ ve $R(0, 0, 2)$ noktalarının belirttiği düzleme olan uzaklığını hesaplayınız.

18. $x\,O\,y$ düzleminde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ noktaları veriliyor. Bu noktaların uzaydaki koordinatlarının $A(x_1, y_1, 0)$, $B(x_2, y_2, 0)$, $C(x_3, y_3, 0)$ olduğunu düşünerek, $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanının

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

determinantının mutlak değerinin yarısına eşit olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak, köşeleri $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(2, 3)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

19. İki düzlem arasındaki açı, onların normalleri arasındaki açı olarak tanımlanır. İki düzlem arasındaki açının ölçüsünün

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2}}{\|\mathbf{n_1}\|\|\mathbf{n_2}\|}\right)$$

olacağını gösteriniz. Bundan yararlanarak

$x + \sqrt{2}y + z + 8 = 0$, $x + \sqrt{2}y + z - 1 = 0$

denklemli düzlemler arasındaki açının ölçüsünü bulunuz.

20. Bir doğruyla bir düzlem arasındaki açı, o doğrunun düzlem üzerindeki dik izdüşümüyle yaptığı açıdır. Bu açının ölçüsü α olduğunda

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{n}\|}$$

olacağını gösteriniz. Burada $\boldsymbol{v}$ doğrunun doğrultman vektörü, $\boldsymbol{n}$ de düzlemin normalidir. Bundan yararlanarak $x + \sqrt{2}y + z + 1 = 0$ denklemli düzlem ile $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{\sqrt{2}} = \frac{z+3}{1}$ denklemli doğru arasındaki açının ölçüsünü bulunuz.

21. Parametrik denklemleri

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 4t + 3 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 2s + 4 \\ z = -4s - 1 \end{cases}$$

olan doğruların kesim noktasını bulunuz. Bu iki doğrunun belirttiği düzlemin denklemini yazınız.

22. Arakesitleri $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$ parametrik gösterimine sahip doğru olan iki düzlem bulunuz.

23. Parametrik denklemleri

$x = a_1 s + b_1$, $y = a_2 s + b_2$, $z = a_3 s + b_3$,

$x = c_1 t + d_1$, $y = c_2 t + d_2$, $z = c_3 t + d_3$

olan doğruların kesişmesi veya paralel olması için gerek ve yeter şartın

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 - d_1 & b_2 - d_2 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0$$

olduğunu ispatlayınız.

24. a, b, c, d reel sayıları için

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

olduğunu gösteriniz.

[Yol Gös.: $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ve $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{i} + d\boldsymbol{j}$ olsun].

☞ ÇÖZÜMLER

1. a) $\|a+b\| = \|a-b\| \Leftrightarrow \|a+b\|^2 = \|a-b\|^2 \Leftrightarrow (a+b).(a+b) = (a-b).(a-b) \Leftrightarrow$

$\|a\|^2 + \|b\|^2 + 2a.b = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2a.b \Leftrightarrow 4a.b = 0 \Leftrightarrow a.b = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

b) $\|a+b\| > \|a-b\| \Leftrightarrow a.b > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$

c) $\|a+b\| < \|a-b\| \Leftrightarrow a.b < 0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

2. $\|u+v\|^2 = (u+v).(u+v) = u.u + 2u.v + v.v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos\theta$

$\le \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$

bulunur.

$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ eşitsizliğinde **u** yerine **u–v** yazılırsa

$\|u\| \le \|u-v\| + \|v\| \Rightarrow \|u-v\| \ge \|u\| - \|v\|$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte **v** yerine **v–u** yazılırsa

$\|v\| \le \|u\| + \|v-u\| \Rightarrow \|u-v\| \ge \|v\| - \|u\|$ eşitsizliği elde edilir.

$\left.\begin{array}{l} \|u-v\| \ge \|u\| - \|v\| \\ \|u-v\| \ge \|v\| - \|u\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|u-v\| \ge \big|\, \|u\| - \|v\| \,\big|$

bulunur.

3. $\|u+v\|^2 = (u+v).(u+v) = \|a\|^2 + \|v\|^2 + 2u.v = \|u\|^2 + \|v\|^2.$

4. $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = (u+v).(u+v) + (u-v).(u-v)$

$= \|u\|^2 + u.v + v.u + \|v\|^2 + \|u\|^2 - u.v - v.u + \|v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$

5. $\|a+b+c\|^2 = (a+b+c).(a+b+c) = a.a + b.b + c.c + 2(a.b + a.c + b.c)$

$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 + 2(\|a\|\|b\| + \|a\|\|c\| + \|b\|\|c\|)\cos 60° = 16 + 4 + 36 + 8 + 12 + 24 = 100 \Rightarrow \|a+b+c\| = 10$

6. $\|a\times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2\theta = \|a\|^2\|b\|^2(1-\cos^2\theta) = \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2\cos^2\theta = \|a\|^2\|b\|^2 - (a.b)^2$

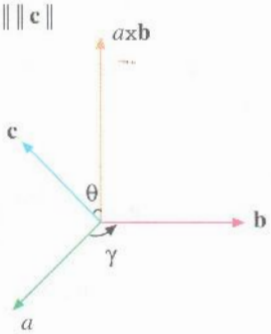
olur. $a \perp b$ ise $a.b = 0$ olacağından $\|a\times b\|^2 = \|a\|^2.\|b\|^2 \Rightarrow \|a\times b\| = \|a\|.\|b\|$ bulunur.

7. $a+b+c=0 \Rightarrow a\times(a+b+c)=0 \Rightarrow a\times a+a\times b+a\times c=0 \Rightarrow 0+a\times b+a\times c=0 \Rightarrow a\times b=-(a\times c) \Rightarrow a\times b=c\times a$ olur. $c\times(a+b+c)=0 \Rightarrow c\times a+c\times b+c\times c=0 \Rightarrow c\times a=-(c\times b) \Rightarrow c\times a=b\times c$ bulunur. Şu halde $a\times b=c\times a=b\times c$ dir.

8. $[a,b,c]=(a\times b).c=\|a\times b\|\,\|c\|\cos\theta=\|a\|\,\|b\|\sin\gamma\,\|c\|\cos\theta=\|a\|\,\|b\|\,\|c\|\sin\gamma\cos\theta\le\|a\|\,\|b\|\,\|c\|$

bulunur. Eşitliğin varolması için $\cos\theta=1$ ve $\sin\gamma=1$ olmalıdır. Bunun için de

$\theta=0$ ve $\gamma=\frac{\pi}{2}$ olmalıdır. Bu durumda her üç vektör birbirine dik olur.



9. Determinant özelliğinden

$$[a+b,\ b+c,\ c+a]=[a,\ b+c,\ c+a]+[b,\ b+c,\ c+a]$$
$$=[a,\ b,\ c+a]+[a,\ c,\ c+a]+[b,\ b,\ c+a]+[b,\ c,\ c+a]$$
$$=[a,b,c]+\underbrace{[a,b,a]}_{0}+\underbrace{[a,c,c]}_{0}+\underbrace{[a,c,a]}_{0}+\underbrace{[b,b,c]}_{0}+\underbrace{[b,b,a]}_{0}+\underbrace{[b,c,c]}_{0}+\underbrace{[b,c,a]}_{[a,b,c]}=2[a,b,c]$$

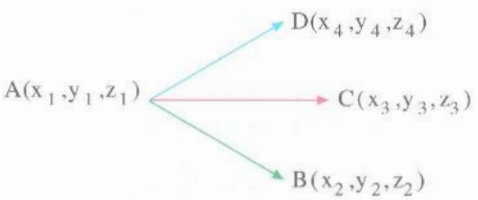
10. $[a,b,(c+\lambda a+\mu b)]=[a,b,c]+[a,b,\lambda a+\mu b]=[a,b,c]+\underbrace{[a,b,\lambda a]}_{0}+\underbrace{[a,b,\mu b]}_{0}=[a,b,c]$

11. $a\times b+b\times c+c\times a=0 \Rightarrow a.(a\times b+b\times c+c\times a)=0 \Rightarrow \underbrace{[a,a,b]}_{0}+[a,b,c]+\underbrace{[a,c,a]}_{0}=0 \Rightarrow [a,b,c]=0 \Rightarrow$

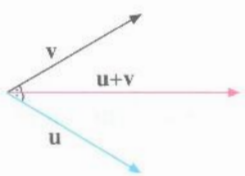
a,b,c aynı düzlemdedirler.

12. A, B, C, D aynı düzlemdedir. $\Leftrightarrow$ **AB, AC, AD** aynı düzlemdedir. $\Leftrightarrow$

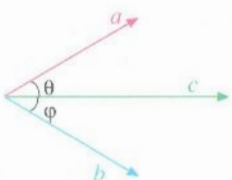
$$[AB,AC,AD]=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$$



13. Bir paralelkenarda köşegenin açıortay olması için onun eşkenar dörtgen olması gerekir. Bu da $\|u\|=\|v\|$ olması demektir.



14. $$\cos\theta=\frac{a.c}{\|a\|\|c\|}=a.\left(\frac{a\|b\|+\|a\|b}{\|a\|+\|b\|}\right)\frac{1}{\|a\|\|c\|}=\frac{\|a\|^2\|b\|+\|a\|^2\|b\|\cos(\theta+\gamma)}{(\|a\|+\|b\|)\|a\|\|c\|}$$
$$=\frac{\|a\|\|b\|[1+\cos(\gamma+\theta)]}{(\|a\|+\|b\|)\|c\|}$$



bulunur. Benzer şekilde

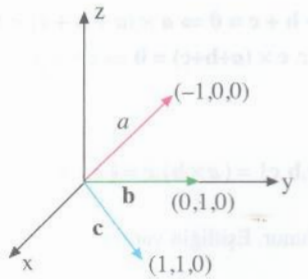
$$\cos\varphi=\frac{b.c}{\|b\|\|c\|}=\frac{\|a\|\|b\|[1+\cos(\varphi+\theta)]}{(\|a\|+\|b\|)\|c\|}$$

olduğu gösterilebilir. Buradan $\cos\theta=\cos\varphi \Rightarrow \theta=\varphi$ bulunur ki bu c vektörünün açıortay olduğunu gösterir.

15. $a=(-1,0,0)$, $\mathbf{b}=(0,1,0)$, $\mathbf{c}=(1,1,0)$ alalım. $a \neq \mathbf{b}$ dir.

$$a\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}=-k \qquad \mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=-k$$

olduğundan, $a\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ dir.



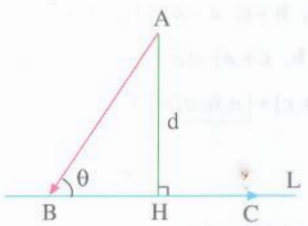
16. $d=|\mathbf{AB}|\sin\theta=\dfrac{\|\mathbf{AB}\|\|\mathbf{BC}\|\sin\theta}{\|\mathbf{BC}\|} \Rightarrow d=\dfrac{\|\mathbf{AB}\times\mathbf{BC}\|}{\|\mathbf{BC}\|}$ *olur.*

$A(1,0,1)$, $B(2,3,1)$, $C(-3,1,4) \Rightarrow$

$\mathbf{AB}=(1,3,0)$, $\mathbf{BC}=(-5,-2,3)$, $\|\mathbf{BC}\|=\sqrt{38}$

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{BC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&3&0\\-5&-2&3\end{vmatrix}=9\mathbf{i}-3\mathbf{j}+13\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{AB}\times\mathbf{BC}\|=\sqrt{259}$$

$$Alan\left(\overset{\Delta}{ABC}\right)=\sqrt{259/38}\ \ br^2$$



17. P, Q, R noktalarının belirttiği düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix}x-2&y-3&z-1\\1&-4&3\\-2&-3&1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 5x-7y+5z+6=0 \quad olur.$$

A(1, 0, 1) noktasının bu düzleme olan uzaklığı

$$d=\frac{|5+5+16|}{\sqrt{25+49+25}}=\frac{26}{\sqrt{99}}=\frac{26}{3\sqrt{11}} \quad birimdir.$$

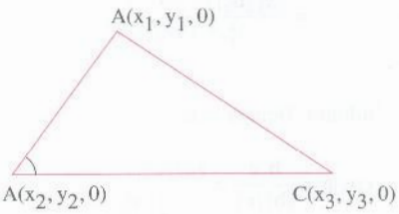
18. $Alan(\overset{\Delta}{ABC})=\dfrac{1}{2}\|\mathbf{BC}\times\mathbf{BA}\|$

$$\mathbf{BC}\times\mathbf{BA}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_3-x_2&y_3-y_2&0\\x_1-x_2&y_1-y_2&0\end{vmatrix}=\left[(x_3-x_2)(y_1-y_2)-(x_1-x_2)(y_3-y_2)\right]k$$

olduğundan

$\|\mathbf{BC}\times\mathbf{BA}\| = |(x_3-x_2)(y_1-y_2)-(x_1-x_2)(y_3-y_2)|$

olur. O halde,



$$\text{Alan}(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)\right|$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

$$= (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3)$$

olduğundan

$$\text{Alan}(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}|\Delta|$$

dır.

A(1, 2); B(–1, 3), C(2, 3) noktaları için

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

olacağından

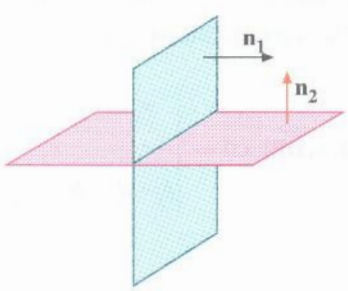
$$\text{Alan}(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

birimkaredir.

19. $\mathbf{n_1}.\mathbf{n_2} = \|\mathbf{n_1}\|\|\mathbf{n_2}\|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\mathbf{n_1}.\mathbf{n_2}}{\|\mathbf{n_1}\|\|\mathbf{n_2}\|} \quad \theta = \arccos\left(\dfrac{\mathbf{n_1}.\mathbf{n_2}}{\|\mathbf{n_1}\|\|\mathbf{n_2}\|}\right)$

$\mathbf{n_1} = (-1, \sqrt{2}, 1)$, $\mathbf{n_2} = (-1, \sqrt{2}, 1)$ *ise* $\theta = \arccos\left(\dfrac{-1+2+1}{2.2}\right) = \arccos\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$ olur.

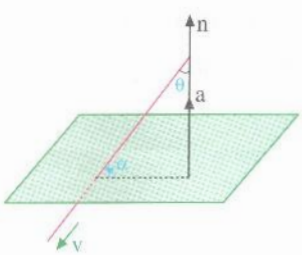


20. $\alpha + \theta = \dfrac{\pi}{2}$

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{v}.\mathbf{n}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{n}\|} \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{\mathbf{v}.\mathbf{n}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{n}\|}$

olur. $\mathbf{n} = \left(1, \sqrt{2}, 1\right)$, $\mathbf{v} = \left(-1, \sqrt{2}, 1\right)$ olacağından

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{-1+2+1}{2.2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} - \alpha = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ *olur.*



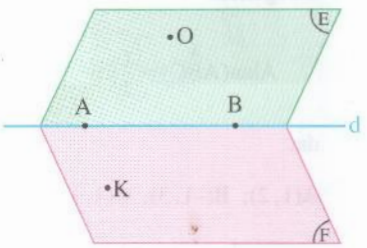
21. $\left.\begin{array}{l} x = 2t+1 \\ y = 3t+2 \\ z = 4t+3 \end{array}\right.$, $\left.\begin{array}{l} x = s+2 \\ y = 2s+4 \\ z = -4s-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2t+1 = s+2 \\ 3t+2 = 2s+4 \\ 4t+3 = -4s-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2t-s = 1 \\ t-2s = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 0,\ s = -1$

bulunur. Bu değerler üçüncü denklemi de sağlar. Dolayısıyla doğrular kesişirler. $t = 0$ için $x = 1, y = 2, z = 3$ olacağından doğrular $(1, 2, 3)$ noktasında kesişirler.

22. Arakesit doğrusunun denklemi

$$x = 1 + t,\ y = 2 - t,\quad z = 3 + 2t$$

olduğundan $t = 0$ ve $t = 1$ için elde edilen A(1,2,3) ve B(2,1,5) noktaları her iki düzlemin de noktalarıdır. Üçüncü noktalar keyfi olarak seçilebilir. Örneğin E düzlemi O(0,0,0), F düzlemi K(1,0,0) noktalarından geçsin. E nin denklemi

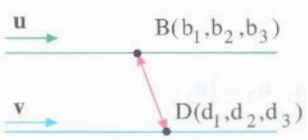


$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1-0 & 2-0 & 3-0 \\ 2-0 & 1-0 & 5-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x + y - 3z = 0,$$

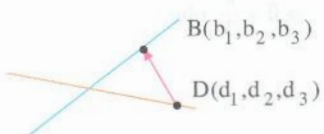
F nin denklemi

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x + 3y - 2z = 7 \text{ olur.}$$

23. Doğruların paralel veya kesişmesi için doğruların **u**, **v** doğrultmanları ile doğrular üzerinde bulunan B ve D noktaları için **DB** vektörünün aynı düzlemde olması gerekir. Bunun için de



$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{DB}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 - d_1 & b_2 - d_2 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$



24. $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|\cos\theta \Rightarrow |\mathbf{u}.\mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \Rightarrow |\mathbf{u}.\mathbf{v}|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$ *olur.*

$\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j},\ \mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ alınırsa $(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

eşitsizliği elde edilir.

byns

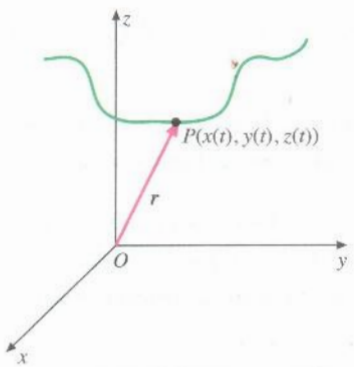
www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

12 VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR

TANIM

F ve G, I aralığı üzerinde tanımlı vektör değerli fonksiyonlar olsun.
F ile G, I üzerinde **ortogonaldir (diktir)** $\Leftrightarrow \forall t \in I$ için $F(t) \cdot G(t) = 0$.



TANIM

$F(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ fonksiyonu verildiğinde

$$\|F(t)\| = \sqrt{[f(t)]^2 + [g(t)]^2 + [h(t)]^2}$$

biçiminde tanımlanan $\|F\|$ fonksiyonu bir reel değerli fonksiyondur.
Bu fonksiyona F fonksiyonunun **normu** veya **büyüklüğü** denir.

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN LİMİT VE SÜREKLİLİĞİ

TEOREM

$F(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ biçiminde tanımlanan F fonksiyonunun t_0 noktasında bir limite sahip olması için gerek ve yeter şart f, g ve h fonksiyonlarının t_0 da birer limite sahip olmasıdır. Limitin varolması durumunda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = \left[\lim_{t \to t_0} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to t_0} g(t)\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to t_0} h(t)\right]\mathbf{k}$$

TANIM

F, I aralığı üzerinde tanımlı bir vektör değerli fonksiyon ve t_o da I nın bir yığılma noktası olsun.

F fonksiyonu t_o noktasında **süreklidir** $\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$.

F, I üzerinde süreklidir $\Leftrightarrow$ F, I nın her noktasında süreklidir.

TANIM

Bir eğri kendi kendisini kestiğinde, arakesit noktalarına eğrinin **katlı noktaları** denir. Kendini kesmeyen eğrilere **basit eğriler** denir.

C eğrisi **kapalıdır** $\Leftrightarrow$ C eğrisinin tanım kümesi $[a, b]$ olan ve $r(a) = r(b)$ eşitliğini sağlayan bir $r(t)$ parametrik gösterimi vardır.

Basit Eğriler

Basit olmayan eğriler

byns

PROBLEMLER

- Vektör Değerli Fonksiyonlar
- Vektör Değerli Fonksiyonların Limit ve Sürekliliği

1. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

(a) $\mathbf{F}(t) = e^t\mathbf{i} + \sqrt{1+t^2}\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F}(t) = t^2\mathbf{i} + \sqrt[3]{t}\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{F}(t) = \sin h\,t\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2-1}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

(d) $\mathbf{F}(t) = \dfrac{\sin t}{t}\mathbf{i} + \ln(1+t)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

(e) $\mathbf{F}(t) = \sqrt{4-t^2}\,\mathbf{i} + \sqrt{1+t^2}\,\mathbf{i}$

2. $F(t) = e^{2t}\,i + e^t\,j + t\,k$ ve $s(t) = \ln t$ olduğuna göre Fos fonksiyonunun kuralını ve tanım kümesini bulunuz.

3. $F(t) = (1-t^2)\,i + t\,j + (1+t^3)\,k$ ve $G(t) = t\,i + t^3\,j + t^2\,k$ fonksiyonları için $F \cdot G$ ve $F \times G$ fonksiyonlarının kuralını bulunuz.

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{t\to 2}\left(\dfrac{t^2-4}{t-2}\mathbf{i} + \dfrac{t}{t+1}\mathbf{j} + t\mathbf{k}\right)$

(b) $\lim\limits_{t\to 0}\left(t\,\|t\|\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \dfrac{\sin 2t}{t}\mathbf{k}\right)$

(c) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1-\cos 2t}{t^2}\mathbf{i} + \dfrac{\sin 3t}{5t}\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}\right)$

(d) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{-t}\mathbf{i} + \dfrac{t^2+1}{t^2-1}\mathbf{j} + \dfrac{\sin 2t}{t}\mathbf{k}\right)$

5. $F(t) = t\,i + t^2\,j + t^3\,k$ ve $G(t) = 2t\,i - j + t^3\,k$ olduğuna göre aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{t\to 0}\|\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)\|$

(b) $\lim\limits_{t\to 1}[\mathbf{F}(t).\mathbf{G}(t)]$

(c) $\lim\limits_{t\to 0}\|\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)\|$

(d) $\lim\limits_{t\to 1}\|\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)\|$

6. $u = i - j$ ve $v = i + j$ olmak üzere

$F(t) = u\sin t + v\cos t$, $0 \le t \le \pi$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonu için aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathbf{F}(t)$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\|\mathbf{F}(t)\|$

(c) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}[\tan t\ \mathbf{F}(t)]$

(d) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{6}}[(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).\mathbf{F}(t)]$

7. Aşağıdaki tek taraflı limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{t\to 0^+} t\mathbf{i} + 2\sqrt[4]{t}\,\mathbf{j} - \dfrac{t}{\ln t}\mathbf{k}$

(b) $\lim\limits_{t\to 1^-} t\,\|t\|\,\mathbf{i} + \dfrac{\sin \pi t}{t-1}\mathbf{j} + \sqrt{t-1}\,\mathbf{k}$

(c) $\lim\limits_{t\to 1^-}\left[\sqrt{1-t}\,\mathbf{i} + (1-t)\ln(1-t)\mathbf{j}\right]$

8. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiğini çiziniz.

(a) $r(t) = t\,i$, $\quad -1 \le t \le 1$

(b) $r(t) = t\,i + t\,j + t\,k$, $\quad -\infty < t < \infty$

(c) $r(t) = (2t-1)\,i - 3t\,j + k$, $\quad -\infty < t < \infty$

(d) $r(t) = 2\cos t\,i - \sin t\,j - 3k$, $\quad 0 \le t \le \pi$

9. $r(t) = \cos \pi t\,i + \sin \pi t\,j + t\,k$ helisi ile $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ küresinin kesim noktalarını bulunuz.

10. $r(t) = 2(t^2-1)\,i + (t^3 - t^2)\,j + t^3(t-1)\,k$ eğrisinin bir kapalı eğri olup olmadığını araştırınız. Varsa katlı noktalarını bulunuz.

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(t)=e^t$ ve $g(t)=\sqrt{1+t^2}$ her yerde $h(t)=\ln t$, $(0,+\infty)$ aralığında tanımlı olduğundan $\mathbf{F}(t)$, $(0, +\infty)$ aralığında tanımlıdır.

   (b) $f(t)=t^2$, $g(t)=t^3$, $h(t)=t$ fonksiyonları her yerde tanımlı olduklarından $\mathbf{F}(t)$ her yerde tanımlıdır.

   (c) $\mathbf{F}(t)=\sinh t$ ve $h(t)=1$ her yerde, $g(t)=\dfrac{1}{t^2-1}$ ise $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ üzerinde tanımlı olduğundan $\mathbf{F}(t)$ fonksiyonu $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ de tanımlıdır.

   (d) $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ fonksiyonu $\mathbf{R}\setminus\{0\}$; $g(t)=\ln(1+t)$, $(-1,+\infty)$ üzerinde, $h(t)=t$ de $\mathbf{R}$ üzerinde tanımlı olduğundan $\mathbf{F}(t)$ nin tanım kümesi $(-1,+\infty)\setminus\{0\}$ dır.

   (e) $f(t)=\sqrt{4-t^2}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında, $g(t)=\sqrt{1+t^2}$ de $(-\infty,+\infty)$ üzerinde tanımlı olduğundan $\mathbf{F}(t)$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında tanımlıdır.

2. $\mathbf{F}(t)=e^{2t}\mathbf{i}+e^t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $s(t)=\ln t$

   $(\mathbf{F}\circ s)(t)=\mathbf{F}(s(t))=e^{2\ln t}\mathbf{i}+e^{\ln t}\mathbf{j}+\ln t\,\mathbf{k}=t^2\mathbf{i}+t\,\mathbf{j}+\ln t\,\mathbf{k}$

   fonksiyonunun tanım kümesi $(0, +\infty)$ aralığıdır.

3. $\mathbf{F}(t)=(1-t^2)\mathbf{i}+t\,\mathbf{j}+(1+t^3)\mathbf{k}$, $\mathbf{G}(t)=t\,\mathbf{i}+t^3\,\mathbf{j}+t^2\,\mathbf{k}$

   $(\mathbf{F}.\mathbf{G})(t)=\mathbf{F}(t).\mathbf{G}(t)=t-t^3+t^4+t^2+t^5=t^5+t^4-t^3-t^2+t$

   $$(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(t)=\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1-t^2&t&1+t^3\\t&t^3&t^2\end{vmatrix}=-t^6\mathbf{i}+\left(2t^4-t^2+t\right)\mathbf{j}+(-t^5+t^3-t^2)\mathbf{k}$$

4. (a) $$\lim_{t\to2}\left[\frac{t^2-4}{t-2}\mathbf{i}+\frac{t}{t+1}\mathbf{j}+\not{t}\mathbf{k}\right]=\lim_{t\to2}\left[(t+2)\mathbf{i}+\frac{t}{t+1}\mathbf{j}+\not{t}\mathbf{k}\right]=4\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

   (b) $$\lim_{t\to0}\left(t\,[\![t]\!]\,\mathbf{i}+e^t\,\mathbf{j}+\frac{\sin 2t}{t}\mathbf{k}\right)=0.\mathbf{i}+1.\mathbf{j}+2\mathbf{k}=\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

   (c) $$\lim_{t\to0}\left(\frac{1\cos 2t}{t^2}\mathbf{i}+\frac{\sin 3t}{5t}\mathbf{j}+\not{t}\mathbf{k}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{t}\mathbf{i}+\frac{3}{5}\mathbf{j}+0.\mathbf{k}=2\mathbf{i}+\frac{3}{5}\mathbf{j}$$

   (d) $$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}\mathbf{i}+\frac{t^2+1}{t^2-1}\mathbf{j}+\frac{\sin 2t}{t}\mathbf{k}\right)=0.\mathbf{i}+1.\mathbf{j}+0.\mathbf{k}=\mathbf{j}$$

5. (a) $\lim_{t\to 0}\|\mathbf{F}(t)+\mathbf{G}(t)\| = \lim_{t\to 0}\|3t\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j}+2t^3\mathbf{k}\| = \lim_{t\to 0}\left[9t^2+(t^2-1)^2+4t^6\right]^{1/2} = 1$

(b) $\lim_{t\to 1}[\mathbf{F}(t).\mathbf{G}(t)] = \left[\lim_{t\to 1}\mathbf{F}(t)\right].\left[\lim_{t\to 1}\mathbf{G}(t)\right] = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).(2i-\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 2-1+1=2$

(c) $\lim_{t\to 0}[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)] = \left[\lim_{t\to 0}\mathbf{F}(t)\right]\times\left[\lim_{t\to 0}\mathbf{G}(t)\right] = \mathbf{0}\times(-\mathbf{j}) = \mathbf{0}$

(d) $\lim_{t\to 1}[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)] = \left[\lim_{t\to 1}\mathbf{F}(t)\right]\times\left[\lim_{t\to 1}\mathbf{G}(t)\right] = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

6. $\mathbf{F}(t) = \mathbf{u}\sin t + \mathbf{v}\cos t = (\mathbf{i}-\mathbf{j})\sin t + (\mathbf{i}+\mathbf{j})\cos t$

(a) $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\mathbf{F}(t) = (\mathbf{i}-\mathbf{j})1+(\mathbf{i}+\mathbf{j})0 = \mathbf{i}-\mathbf{j}$

(b) $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\|\mathbf{F}(t)\| = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\left[(\sin t+\cos t)^2+(\sin t-\cos t)^2\right] = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}2 = 2$

(c) $\lim_{t\to\frac{\pi}{3}}[\tan t\,\mathbf{F}(t)] = \lim_{t\to\frac{\pi}{3}}[\sin t\tan t(\mathbf{i}-\mathbf{j})+\cos t\tan t(\mathbf{i}+\mathbf{j})]$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}(\mathbf{i}-\mathbf{j})+\frac{1}{2}\sqrt{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)\mathbf{j}$

(d) $\lim_{t\to\frac{\pi}{6}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).\mathbf{F}(t) = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).\lim_{t\to\frac{\pi}{6}}[(\mathbf{i}-\mathbf{j})\sin t+(\mathbf{i}+\mathbf{j})\cos t]$

$= (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).\left[\frac{1}{2}(\mathbf{i}-\mathbf{j})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})\right] = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

7. (a) $\lim_{t\to 0^+}\left(t\mathbf{i}+2\sqrt[4]{t}\,\mathbf{j}-\frac{t}{\ln t}\mathbf{k}\right) = 0.\mathbf{i}+0.\mathbf{j}-0.\mathbf{k} = 0$

(b) $\lim_{t\to 1^+}\left(t[\![t]\!]\,\mathbf{i}+\frac{\sin\pi t}{t-1}\mathbf{j}+\sqrt{t-1}\,\mathbf{k}\right) = \mathbf{i}-\mathbf{j}$

(c) $\lim_{t\to 1^-}\left[\sqrt{1-t}\,\mathbf{i}+(1-t)\ln(1-t)\mathbf{j}\right] = 0.\mathbf{i}+\lim_{t\to 1^-}(1-t)\ln(1-t)\mathbf{j}$

olur. Diğer taraftan

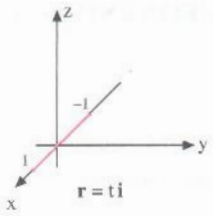
$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)\ln(1-t) = \lim_{t\to 1^-}\frac{\ln(1-t)}{\frac{1}{1-t}} = \lim_{t\to 1^-}\frac{\frac{-1}{1-t}}{\frac{1}{(1-t)^2}} = \lim_{t\to 1^-}t-1 = 0$$

olduğundan

$$\lim_{t\to 1^-}\left[\sqrt{1-t}\,\mathbf{i}+(1-t)\ln(1-t)\mathbf{j}\right] = \mathbf{0}$$

olacaktır.

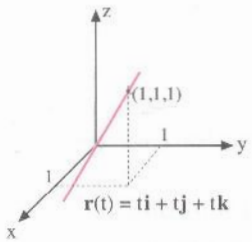
8. **(a)** $r(t) = t\mathbf{i}, \quad -1 \le t \le 1$



(b) $r(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$x(t) = t, \; y(t) = t, \; z(t) = t$

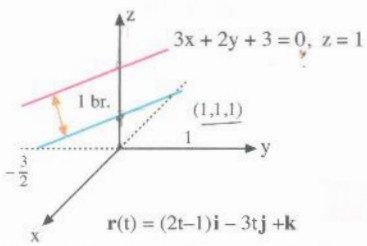
$x = y = z$ doğrusu



(c) $r(t) = (2t-1)\mathbf{i} - 3t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$x(t) = 2t - 1, \; y(t) = -3t, \; z(t) = 1$

$x = 2\left(-\frac{y}{3}\right) - 1 \Rightarrow 3x + 2y + 3 = 0$

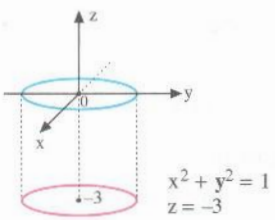


(d) $r(t) = \cos t\, i - \sin t\, j - 3k$

$x = \cos t, \; y = \sin t, \; z = -3$

$x^2 + y^2 = 1$ çemberinin $z = -3$ düzlemine.

kaydırılmasıyla elde edilen eğri



r(t) =cos ti – sin tj – 3k

9. $x = \cos \pi t, \; y = \sin \pi t, \; z = t$

$x^2 + y^2 + z^2 = 10 \Rightarrow 1 + t^2 = 10 \Rightarrow t = \pm 3$

$t = -3$ için $x = -1, \; y = 0, \; z = -3$ ve

$t = 3$ için $x = -1, \; y = 0, \; z = 3$ olur.

Kesim noktaları A(–1, 0, –3) ve B(–1, 0,) noktalarıdır.

10. $r(0) = r(1) = 0$ olduğundan eğri bir kapalı eğridir.

$r'(t) = 4t\,i + (3t^2 - 2t)\,j + (4t^3 + 3t^2)\,k$ ve

$r'(t) = 0$ ve $r'(1) = 4i + j + k$ olduğundan 0(0,0,0) noktası bir katlı noktadır.

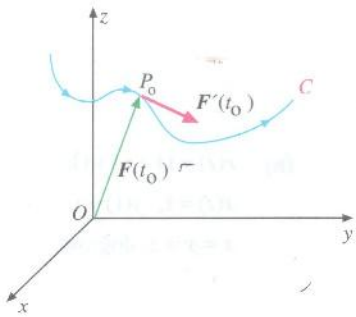
VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVİ

TEOREM

$F(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ fonksiyonunun t_0 noktasında türevli olması için gerek ve yeter şart, f, g, h fonksiyonlarının t_o da türevli olmasıdır. F türevli olduğunda

$$F'(t_0) = f'(t_0)\,\mathbf{i} + g'(t_0)\,\mathbf{j} + h'(t_0)\,\mathbf{k}$$

olur.



TEOREM

F, G ve h fonksiyonları t noktasında, u da $u(s) = t$ eşitliğini sağlayan s noktasında türevli ise,

$$\begin{aligned}
[F(t) + G(t)]' &= F'(t) + G'(t)\\
[h(t)\,F(t)]' &= h'(t)\,F(t) + h(t)\,F'(t)\\
[F(t)\,.\,G(t)]' &= F'(t)\,.\,G(t) + F(t)\,.\,G'(t)\\
[F(t)\times G(t)]' &= F'(t)\times G(t) + F(t)\times G'(t)\\
[(F\circ u)\,(t)]' &= F'(u(t))\,u'(t)
\end{aligned}$$

olur.

TEOREM

F fonksiyonu $I = (a, b)$ aralığının her noktasında türevli olsun. $\|F\|$ sabit ise F ile F' ortogonaldir (diktir).

Birim teğet vektör $\Rightarrow T(t) = \dfrac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ birim teğet vektör.

$\|\vec{T}'(t)\| \neq 0$ ise

$\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$ bu vektöre birim normal vektör veya normal vektör denir.

$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$

Binormal vektör = 2. Normal vektör denir.

UZAY EĞRİLERİNİN UZUNLUKLARI

Parametrik gösterimi

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \le t \le b$$

olan bir düzgün C eğrisinin uzunluğu

$$\ell = \int_a^b \|r'(t)\|\,dt$$

olur.

t=0 anındaki hızı.

Not: Dairesel hareketlerde hız vektörü daima konum vektörüne diktir.

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

TANIM

f, g, h fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar olsun. $F(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki **belirli integrali**

$$\int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

vektörüdür.

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımızla..

byns

PROBLEMLER

- Vektör Değerli Fonksiyonların Türevi
- Eğri Uzunlukları
- Vektör Değerli Fonksiyonların integrali

1. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevini bulunuz.

(a) $F(t) = (t+1)\,i + (t^2-1)\,j + 2t\,k, \qquad t = 1$

(b) $F(t) = t\cos t\,i + t\sin t\,j + t\,k, \qquad t = \frac{\pi}{2}$

(c) $F(t) = (e^t \sin t)\,i + (e^t \cos t)\,j + e^t\,k, \qquad t = 0$

(d) $F(t) = e^{-t}\,i + (2\cos t)\,i + (2\sin 3t)\,k, \qquad t = 0$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(a) $F(t) = t\,i + t^2 j + t^3 k$

(b) $F(t) = (t\ln t - t)\,i + e^t\,(t-1)\,j + e^t\,k$

(c) $F(t) = (\arcsin 4t)\,i - 3\arctan(2t-1)\,j + 7\ln(3t^2)\,k$

3. $F(t) = \sin t\,i - j + t\,k$, $G(t) = \cos t\,i + \sin t\,j - k$ olduğuna göre, aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

(a) $2F - 3G$ (b) $F \cdot G$ (c) $F \times G$

4. $F(t) = (3\sin 2t)\,i + 3\,(1+\cos 2t)\,j + 6\sin t\,k$ fonksiyonu için ifadesini hesaplayınız.

5. F, ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$$[F(t) \times F'(t)]' = F(t) \times F''(t)$$

olacağını gösteriniz.

6. Aşağıda parametrik gösterimleri verilen eğrilerin belirtilen noktalardaki birim teğet vektörlerini bulunuz.

(a) $r(t) = 3\cos t\,i + 4\sin t\,j, \qquad t = \frac{\pi}{4}$

(b) $r(t) = e^t\,i + e^{-t}\,j + (1+t^2)\,k, \qquad t = 0$

(c) $r(t) = t\cos t\,i + t\sin t\,j + t\,k, \qquad t = \frac{\pi}{2}$

(d) $r(t) = 2\cos t\,i + 2\sin t\,j + 5t\,k, \qquad t = \frac{\pi}{3}$

7. Aşağıda parametrik gösterimleri verilen eğrilerin birim teğet vektörlerini bulunuz.

(a) $r(t) = (t^2+4)\,i + 2t\,j + k$

(b) $r(t) = \sin t\,i - \cos t\,k$

(c) $r(t) = 2t\,i + t^2 j + \frac{1}{3}t^3 k$

8. $r(t) = e^t\,i + e^{-t}\,j + \sqrt{2}\,t\,k$

eğrisinin $t = 0$ noktasındaki T, N, B vektörlerini bulunuz.

9. Konum vektörleri aşağıda verilen bir parçacığın verilen t anındaki hız ve ivme vektörlerini bulunuz.

(a) $r(t) = (1+t)\,i + (t^2-1)\,j + 2t\,k, \qquad t = 1$

(b) $r(t) = (2\cos t)\,i + (3\sin t)\,j + 4t\,k, \qquad t = \frac{\pi}{2}$

(c) $r(t) = (e^{-t})\,i + (2\cos 3t)\,j + (2\sin 3t)\,k, \qquad t = 0$

(d) $r(t) = 2\ln(t+1)\,i + t^2 j + \frac{t^2}{2}\,k, \qquad t = 1$

10. Aşağıda konum vektörleri verilen parçacığın $t = 0$ anındaki hız ve ivme vektörlerini bulunuz. Bu vektörlerin arasındaki açının ölçüsünü hesaplayınız.

(a) $r(t) = \frac{4}{9}(t+1)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}$

(b) $r(t) = \ln(1+t^2)\mathbf{i} + (\arctan t)\mathbf{j} + \sqrt{1+t^2}\,\mathbf{k}$

(c) $r(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t\,\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2\right)\mathbf{j}$

(d) $r(t) = (3t+1)\mathbf{i} + (\sqrt{3}t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

11. Aşağıda konum vektörleri verilen parçacığın hangi noktalardaki hız ve ivme vektörleri diktir?

(a) $r(t) = (t - \sin t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

(b) $r(t) = \sin t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}, \quad t \ge 0$

byns

12. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_0^1 \left[4t^3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2(t+1)\mathbf{k}\right]\, dt$

(b) $\int_1^2 \left[(6-6t)\mathbf{i} + 3\sqrt{t}\mathbf{j} + \left(\frac{4}{t^2}\right)\mathbf{k}\right]\, dt$

(c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \left[(\sin t)\mathbf{i} + (1+\cos t)\mathbf{j} + (\sec^2 t)\mathbf{k}\right]\, dt$

(d) $\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5-t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k}\right]\, dt$

13. Aşağıda verilenleri gerçekleyen $\mathbf{r}(t)$ fonksiyonunu bulunuz.

(a) $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

(b) $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (180t)\mathbf{i} + (180\mathbf{t} - 16t^2)\mathbf{j}$, $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{j}$

(c) $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{3}{2}(t+1)^{3/2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \frac{1}{1+t}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{k}$

14. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $\mathbf{r}(t) = (3\sin 2t)\,\mathbf{i} + (3\cos 2t)\,\mathbf{j} + 8t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$

(b) $\mathbf{r}(t) = (6e^t \cos t)\,\mathbf{i} + (6e^t \sin t)\,\mathbf{j} + 17e^t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

(c) $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}\,t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

(d) $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1-\cos t)\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

(e) $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1-\cos t)\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

(f) $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\,\mathbf{i} + (\cos t)\,\mathbf{j} + \frac{2}{3}\,t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 8$

(g) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $-1 \le t \le 1$

(h) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}\,t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 3$

15. Aşağıda parametrik gösterimi verilen eğrilerin karşılarında yazılı noktalar arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

(a) $r(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \frac{2}{27}t^3\,\mathbf{k}$

$(0,0,0)$ *ve* $(3,3,2)$

(b) $r(t) = t\mathbf{i} + (2\arcsin\frac{t}{2})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\ln\frac{2+t}{2-t}\mathbf{k}$

$(0,0,0)$ *ve* $(1, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\ln 3)$

16. $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + bt\,\boldsymbol{k}$ dairesel helisi veriliyor.

(a) Bu helisin $0 \le t \le 2\pi$ parametre aralığına karşılık gelen parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

(b) Helisin her noktasındaki birim teğet vektörün Oz–ekseniyle sabit ölçülü bir açı oluşturduğunu gösteriniz.

17. $\boldsymbol{u}(t) = t\,\boldsymbol{i} + (t+1)\,\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}(t) = t^2\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{w}(t) = \frac{1}{t^2}\,\boldsymbol{k}$

olduğuna göre $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{u}(t)\,[\,\boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{w}(t)\,]$

fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

18. $K(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|r'(t)\|}$ sayısına

$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$

eğrisinin t noktasındaki **eğriliği** denir. Aşağıdaki eğrilerin t noktasındaki eğriliklerini bulunuz.

(a) $\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j}$

(b) $\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j} + bt\,\boldsymbol{k}$

19. $y = x^2$ parabolünün eğriliğini bulunuz. Parabol hangi noktada en büyük eğriliğe sahiptir?

☞ ÇÖZÜMLER

1. (a) $\mathbf{F}(t)=(t+1)\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j}+2t\mathbf{k},\ t=1 \Rightarrow \mathbf{F}'(t)=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}'(1)=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F}(t)=t\cos t\mathbf{i}+t\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k},\ t=\dfrac{\pi}{2}$

$\mathbf{F}'(t)=(\cos t-t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t+t\cos t)\mathbf{j}+\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{F}(t)=\left(e^t\sin t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\cos t\right)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k},\ t=0$

$\mathbf{F}'(t)=e^t(\sin t+\cos t)\mathbf{i}+e^t(\cos t-\sin t)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}'(0)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{F}(t)=e^{-t}\mathbf{i}+(2\cos t)\mathbf{j}+(2\sin 3t)\mathbf{k},\ t=0$

$\mathbf{F}'(t)=-e^{-t}\mathbf{i}-2\sin t\mathbf{j}+6\cos t\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}'(0)=-\mathbf{i}+6\mathbf{k}$

2. (a) $\mathbf{F}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}'(t)=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F}(t)=(t\ln t-t)\mathbf{i}+e^t(t-1)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}'(t)=\ln t\mathbf{i}+te^t\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{F}(t)=(\arcsin 4t)\mathbf{i}-3\arctan(2t-1)\mathbf{j}+7\ln(3t^2)\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}'(t)=\dfrac{4}{\sqrt{1-16t^2}}\mathbf{i}-\dfrac{6}{1+(2t-1)^2}\mathbf{j}+\dfrac{14}{t}\mathbf{k}$

3. (a) $(2\mathbf{F}-3\mathbf{G})'(t)=2\mathbf{F}'(t)-3\mathbf{G}'(t)=2\cos t\mathbf{i}+2\mathbf{k}+3\sin t\mathbf{i}-3\cos t\mathbf{j}=(2\cos t+3\sin t)\mathbf{i}-3\cos t\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

(b) $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})'(t)=(\sin t\cos t-\sin t-t)'=\cos t^2t-\sin^2 t-\cos t-1=\cos 2t-\cos t-1$

(c) $(F\times G)(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin t & -1 & t \\ \cos t & \sin t & -1 \end{vmatrix}=(1-t\sin t)i+(\sin t+t\cos t)j+(\sin^2 t+\cos t)k$

$(F\times G)'(t)=(-\sin t-t\cos t)i+(2\cos t-t\sin t)j+(\sin 2t-\sin t)k$

4. **I. yol**

$\mathbf{F}(t)=3\sin 2t\mathbf{i}+3(1+\cos 2t)\mathbf{j}+6\sin t\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{F}'(t)=6\cos 2t\mathbf{i}=6\sin 2t\mathbf{j}=6\cos t\mathbf{k}.$

$\mathbf{F}(t).\mathbf{F}'(t)=18\sin 2t\cos 2t-18\sin 2t-18\sin 2t\cos 2t+36\sin t\cos t=-18\sin 2t+18\sin 2t=0$

II. yol

$\|\mathbf{F}(t)\|^2=9\sin^2 2t+9(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)+36\sin^2 t=9(\sin^2 2t+\cos^2 2t)+9+18\cos 2t+36\sin^2 t$

$=9+9+18(2\cos^2 t-1)+36\sin^2 t=36 \Rightarrow \|\mathbf{F}(t)\|=6 \Rightarrow \mathbf{F}(t).\mathbf{F}'(t)=0$ olur.

5. $\left[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{F}'(t)\right]' = \underbrace{\mathbf{F}'(t)\times\mathbf{F}'(t)}_{=0} + \mathbf{F}(t)\times\mathbf{F}''(t) = \mathbf{F}(t)\times\mathbf{F}''(t)$

6. (a) $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 4\sin t\,\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = -3\sin t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\,\mathbf{j}$

$\left\|\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\| = \left(\frac{9}{2}+8\right)^{1/2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ olacağından $\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left\|\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\|} = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\,\mathbf{j}\right) == -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$ olur.

(b) ve **(c)** benzer biçimde hesaplanır.

7. (a) $\mathbf{r}(t) = \left(t^2+4\right)\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \Rightarrow \left\|\mathbf{r}'(t)\right\| = \sqrt{4t^2+4} = 2\sqrt{t^2+1}$

$\mathbf{T}(t) = \frac{2t\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\,\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = 2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} \Rightarrow \left\|\mathbf{r}'(t)\right\| = (4+4t^2+t^4)^{1/2} = 2+t^2$ olacağından

$\mathbf{T}(t) = \frac{2\,\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j}+t^2\,\mathbf{k}}{2+t^2} = \frac{2}{2+t^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{2+t^2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2+t^2}\mathbf{k}$ bulunur.

8.

$\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j} + \sqrt{2}t\,\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = e^t\,\mathbf{i} - e^{-t}\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\mathbf{k} \Rightarrow \left\|\mathbf{r}'(t)\right\| = \left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right)^{1/2} = e^t + e^{-t}$ olacağından

$\mathbf{T}(t) = \frac{e^t\,\mathbf{i} - e^{-t}\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\mathbf{k}}{e^t+e^{-t}} = \frac{e^t}{e^t+e^{-t}}\mathbf{i} - \frac{e^t}{e^t+e^{-t}}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{T}(0) = \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$ bulunur.

$\mathbf{T}'(t) = \frac{\left(e^t\,\mathbf{i}+e^{-t}\,\mathbf{j}\right)\left(e^t+e^{-t}\right) - \left(e^t-e^{-t}\right)\left(e^t\,\mathbf{i} - e^{-t}\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\mathbf{k}\right)}{\left(e^t+e^{-t}\,\mathbf{j}\right)^2} = \frac{2\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+\sqrt{2}\left(e^t-e^{-t}\right)\mathbf{k}}{\left(e^t+e^{-t}\right)}$

$\left\|\mathbf{T}'(t)\right\| = \frac{1}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}\left[4+4+2\left(e^t-e^{-t}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\left[8+2\left(e^t-e^{-t}\right)^2\right]^{1/2}}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}$ olacağından

$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\left\|\mathbf{T}'(t)\right\|}$ dir. $\mathbf{N}(t) = \frac{2\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+\sqrt{2}\left(e^t-e^{-t}\right)\mathbf{k}}{\left[8+2\left(e^t-e^{-t}\right)^2\right]^{1/2}} \Rightarrow \mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ bulunur.

$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$ olduğundan

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0)\times\mathbf{N}(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

9. (a) $\mathbf{V}(t)=\mathbf{r}'(t)=\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j}+2\mathbf{k}\Rightarrow \mathbf{V}(1)=\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

$a(t)=\mathbf{V}'(t)=2\,\mathbf{j}\Rightarrow a(1)=2\,\mathbf{j}$ (sabit ivmeli hareket)

(b) $\mathbf{V}(t)=\mathbf{r}'(t)=-2\sin t\,\mathbf{i}+3\cos t\,\mathbf{j}+4\mathbf{k}\Rightarrow \mathbf{V}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\mathbf{i}+4\mathbf{k}$

$a(t)=\mathbf{V}'(t)=-2\cos t\,\mathbf{i}-3\sin t\,\mathbf{j}\Rightarrow a(\frac{\pi}{2})=-3\mathbf{j}$

(b) ve (d) benzer biçimde hesaplanır.

10. (a) $V(t)=\frac{4}{9}.\frac{3}{2}(t+1)^{\frac{1}{2}}\mathbf{i}-\frac{4}{9}.\frac{3}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}\mathbf{j}+\frac{1}{3}\mathbf{k}\Rightarrow V(0)=\frac{2}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{1}{3}\mathbf{k}$

$a(t)=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{i}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{j}\Rightarrow a(0)=\frac{1}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}$

$V(0).a(0)=\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+0=0\Rightarrow V(0)\perp a(0)$ dır.

b, c, d benzer biçimde çözülür.

11. (a) $\mathbf{V}(t)=(1-\cos t)\mathbf{i}+(1+\sin t)\,\mathbf{j},\quad a(t)=\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}$

$\mathbf{V}(t).a(t)=\sin t-\sin t\cos t+\cos t+\sin t\cos t=\sin t+\cos t=0$

$\sin t=-\cos t\Rightarrow \boxed{t=\frac{3\pi}{4}}$

(b) $\mathbf{V}(t)=\mathbf{r}'(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-\sin t\,\mathbf{k},\quad a(t)=\mathbf{v}'(t)=-\sin t\,\mathbf{i}-\cos t\,\mathbf{k}$

$\mathbf{V}(t).a(t)=-\cos t\sin t+\sin t\cos t=0\ \Rightarrow\ \forall t\in[0,2\pi]$ için $\mathbf{V}(t)\perp a(t)$

12. (a) $\int_0^1\left[4t^3\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}+2(t+1)\mathbf{k}\right]dt=t^4\mathbf{i}+3t\,\mathbf{j}+(t+1)^2\,\mathbf{k}\ \Big|_0^1=\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

(b) $\int_1^4\left[\frac{1}{t}\mathbf{i}+\frac{1}{5-t}\mathbf{j}+\frac{1}{2t}\mathbf{k}\right]dt=\ln|t|\mathbf{i}-\ln|5-t|\,\mathbf{j}+\frac{1}{2}\ln|t|\,\mathbf{k}\ \Big|_1^4=(\ln 4)\mathbf{i}+(\ln 4)\,\mathbf{j}+\frac{1}{2}\ln 4\,\mathbf{k}=(\ln 2)(2\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+\mathbf{k})$

13. (a) $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-t\,\mathbf{i}-t\,\mathbf{j}-t\,\mathbf{k}\Rightarrow r(t)=-\frac{1}{2}t^2\,\mathbf{i}-\frac{1}{2}t^2\,\mathbf{j}-\frac{1}{2}t^2\,\mathbf{k}+\mathbf{c}$ olur. $\mathbf{r}(0)=\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ olacağından

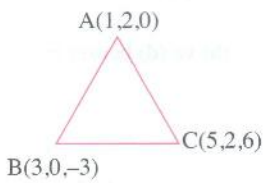
$\mathbf{r}(t)=\left(-\frac{t^2}{2}+1\right)\mathbf{i}+\left(-\frac{t^2}{2}+2\right)\mathbf{j}+\left(-\frac{t^2}{2}+3\right)\mathbf{k}$

bulunur.

14. (a) $\mathbf{r}(t)=(3\sin 2t)\mathbf{i}+(3\cos 2t)\mathbf{j}+8t\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}'(t)=(6\cos 2t)\mathbf{i}-(6\sin 2t)\mathbf{j}+8\mathbf{k}$

$\|\mathbf{r}'(t)\|^2=36\cos^2 2t+36\sin^2 2t+64=100 \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\|=10$

$\ell=\int_0^{2\pi}\|\mathbf{r}'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}10dt=10t\Big|_0^{2\pi}=20\pi$ birim



(b) $\mathbf{r}(t)=\left(6e^t\cos t\right)\mathbf{i}+\left(6e^t\sin t\right)\mathbf{j}+17e^t\mathbf{k}, \quad 0\le t\le 1$

$\mathbf{r}'(t)=6e^t(\cos t-\sin t)\mathbf{i}+6e^t(\sin t+\cos t)\mathbf{j}+17e^t\mathbf{k}$

$\|\mathbf{r}'(t)\| = e^t\left[36(\cos t-\sin t)^2+36(\sin t+\cos t)^2+289\right]^{\frac{1}{2}}$

$= e^t\left[36(\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin^2 t+\sin^2 t+2\cos t\sin t+\cos^2 t)+289\right]^{\frac{1}{2}}$

$= e^t\left[72+289\right]^{\frac{1}{2}}=e^t\sqrt{361}=19e^t$

$l=\int_0^1\|\mathbf{r}'(t)\|=\int_0^1 19e^t dt=19e^t\Big|_0^1=19(e-1)$ br.

(c) $\mathbf{r}(t)=e^t\mathbf{i}+e^{-t}\mathbf{j}+\sqrt{2}t\mathbf{k}, \quad 0\le t\le 1$

$\mathbf{r}'(t)=e^t\mathbf{i}-e^{-t}\mathbf{j}+\sqrt{2}\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\|=\left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right)^{\frac{1}{2}}=e^t-e^{-t}$

$l=\int_0^1\|\mathbf{r}'(t)\|dt=\int_0^1\left(e^t+e^{-t}\right)dt=e^t-e^{-t}\Big|_0^1=e-e^{-1}$

(f) $\mathbf{r}(t)=\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{k}, \quad 0\le t\le 8$

$\mathbf{r}'(t)=\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}+t^{\frac{1}{2}}\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\|=\sqrt{1+t}$

$\ell=\int_0^8\|\mathbf{r}'(t)\|dt=\int_0^8\sqrt{1+t}\,dt=\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^8=\frac{2}{3}(27-1)=\frac{52}{3}$

(g) $\mathbf{r}(t)=\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{j}+\frac{1}{2}t\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}'(t)=\frac{1}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}\mathbf{i}-\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}$

$\|\mathbf{r}'(t)\|^2=\frac{1}{4}(1+t)+\frac{1}{4}(1-t)+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$l=\int_{-1}^1\frac{\sqrt{3}}{2}dt=\frac{\sqrt{3}}{2}.2=\sqrt{3}$ br.

15. (a) $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\frac{1}{3}t^2\mathbf{j}+\frac{2}{27}t^3\mathbf{k}$

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \\ \frac{1}{3}t^2=0 \\ \frac{2}{27}t^3=0 \end{array}\right\}\Rightarrow t=0 \quad \text{ve} \quad \left.\begin{array}{l} t=3 \\ \frac{1}{3}t^2=3 \\ \frac{2}{27}t^3=2 \end{array}\right\}\Rightarrow t=3 \text{ olur.}$$

$$\mathbf{r}'(t)=\mathbf{i}+\frac{2}{3}t\,\mathbf{j}+\frac{2}{9}t^2\mathbf{k}\Rightarrow\|\mathbf{r}'(t)\|^2=1+\frac{4}{9}t^2+\frac{4}{81}t^4=\left(1+\frac{2}{9}t^2\right)^2\Rightarrow\|\mathbf{r}'(t)\|=1+\frac{2}{9}t^2$$

$$\ell=\int_0^3\left(1+\frac{2}{9}t^2\right)dt=t+\frac{2}{27}t^3\Big|_0^3=5 \text{ br.}$$

(b) $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\left(2\arcsin\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}+\frac{1}{2}\ln\frac{2+t}{2-t}\mathbf{k},\ (0,0,0)\to\left(1,\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\ln 3\right)$

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \\ 2\arcsin\frac{t}{2}=0 \\ \frac{1}{2}\ln\frac{2+t}{2-t}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow t=0 \quad \text{ve} \quad \left.\begin{array}{l} t=0 \\ 2\arcsin\frac{t}{2}=\frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{2}\ln\frac{2+t}{2-t}=\frac{1}{2}\ln 3 \end{array}\right\}\Rightarrow t=1$$

$$\mathbf{r}'(t)=\mathbf{i}+\frac{2}{\sqrt{4-t^2}}\mathbf{j}+\frac{2}{4-t^2}\mathbf{k}\ \Rightarrow\ \|\mathbf{r}'(t)\|=\left(1+\frac{4}{4-t^2}+\frac{4}{(4-t^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{2}{4-t^2}$$

$$\ell=\int_0^1\left(1+\frac{2}{4-t^2}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln\frac{2+t}{2-t}\Big|_0^1=1+\frac{1}{2}\ln 3$$

16. (a) $\mathbf{r}(t)=a\cos t\,\mathbf{i}+a\sin t\,\mathbf{j}+bt\mathbf{k},\quad 0\le t\le 2\pi$

$$\mathbf{r}'(t)=-a\sin t\,\mathbf{i}+a\cos t\,\mathbf{j}+b\mathbf{k}\ \Rightarrow\ \|\mathbf{r}'(t)\|=\sqrt{a^2+b^2}\ \Rightarrow\ 1=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{a^2+b^2}\,\pi$$

(b) $\mathbf{T}(t).\mathbf{k}=\dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.\mathbf{k}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t\,\mathbf{i}+a\cos t\,\mathbf{j}+b\mathbf{k}).k=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\mathbf{T}(t).\mathbf{k}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \Rightarrow\ \|\mathbf{T}(t)\|\,\|\mathbf{k}\|\cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \Rightarrow\ \cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\theta=\text{sabit}$$

17. $\mathbf{u}=t\mathbf{i}+(t+1)\mathbf{k},\quad \mathbf{n}=t^2\mathbf{j},\quad \mathbf{w}=\dfrac{1}{t^2}\mathbf{k}$

$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{i}$ ve $\mathbf{u}.(\mathbf{n}\times\mathbf{w})=t$ olur. Dolayısıyla $\left[\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\right]'=t'=1$ dir.

18. (a) $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = a$

olacağından

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = (-\sin t)\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}$$

dir. Bu durumda

$$\mathbf{K}(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}$$

bulunur. Şu halde çemberin eğriliği her noktada yarıçapın tersine eşittir.

(b) $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k} \Rightarrow r'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ olur.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\sin t\,i + a\cos t\,j + b\,k)$$

olduğundan

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\cos t\,\mathbf{i} - a\sin t\,\mathbf{j}) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

olur. Buna göre, helisin her noktadaki eğriliği sabit olup

$$\mathbf{K}(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

sayısıdır.

19. $x = t$ denirse $y = t^2$ olur. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$ parabolün parametrik denklemidir.

$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$ olacağından

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}(\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}) \Rightarrow \mathbf{T}'(t) = \frac{2\,\mathbf{j}.\sqrt{1 + 4t^2} - \dfrac{8t}{2\sqrt{1 + 4t^2}}(\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})}{1 + 4t^2}$$

$$= \frac{(2 + 8t^2)\,\mathbf{j} - 4t\,\mathbf{i} - 8t^2\,\mathbf{j}}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-4t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dir. Bu durumda

$$\mathbf{K}(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\sqrt{16t^2 + 4}}{(1 + 4t^2)^2} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olur. $K(t)$, $t = 0$ için en büyük değerini alır. Bu değer $K(0) = 2$ dir.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $F(t) = t\,|t|\,i + [\![t^2 - 2t]\!]\,j + \cos t\,k$

fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz.

2. $\mathbf{F}(t) = \dfrac{-2t}{1+t^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{1+2t^2}{1+t^2}\,\mathbf{j}$

$\mathbf{G}(t) = \dfrac{-2-4t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathbf{i} - \dfrac{4t}{(1+t^2)^2}\,\mathbf{j}$

fonksiyonları için $[\,F(t)\,.\,G(t)\,]'$ türevini hesaplayınız.

3. Aşağıda verilen F ve g fonksiyonları için $(Fog)'(t)$ türevlerini hesaplayınız.

(a) $F(t) = (\ln t)\,i - 4e^t j + \dfrac{t-1}{t}\,k,\ g(t) = \sqrt{t}$

(b) $F(t) = t^3 i - \sqrt{3}\,t j + \dfrac{1}{t^2}\,k,\ g(t) = \cos t$

4. $F(t) = \dfrac{4t}{1+4t^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{1-4t^2}{1+4t^2}\,\mathbf{j}$ *için* $\|\mathbf{F}(t)\|$

ifadesini hesaplayınız. Bundan yararlanarak $F(t)\,.\,F'(t)$ ifadesini hesaplayınız.

5. $F(t) = \cos t\,i + \sin t\,j$ olsun. $(0, \pi)$ aralığında öyle bir t_o bulunuz ki $\dfrac{\mathbf{F}(\pi) - \mathbf{F}(0)}{\pi - 0}$ vektörü $F(t_o)$ vektörüne paralel olsun.

$$\mathbf{F}'(t) = \frac{\mathbf{F}(\pi) - \mathbf{F}(0)}{\pi - 0}$$

olacak şekilte $t \in (0, \pi)$ var mıdır?

6. $F(t) = (\sin t)\,i - (\cos t)\,j$ olsun. $\forall t \in R$ için $F(t)$ ile $F''(t)$ vektörlerinin paralel olduğunu gösteriniz. Bu iki vektörün yönünü aynı yapan t parametresi var mıdır?

7. Problem 6 daki soruyu $F(t) = e^{-2t} i + e^{2t} j$ fonksiyonu için cevaplandırınız.

8. F, I aralığı üzerinde tanımlı bir fonsiyon ve her $t \in I$ için $F(t)$ ile $F''(t)$ paralel olsun. $F \times F'$ fonksiyonunun sabit olduğunu gösteriniz.

9. Parametrik gösterimleri

$$r(t) = t\,i + 2t\,j + t^2\,k,$$

$$s(t) = t^2\,i + (t-1)\,j + (2 - t^2)\,k$$

olan iki eğrinin $A(1, 1)$ noktasında kesiştiklerini gösteriniz. Bu iki eğriye A noktasında çizilen teğet vektörlerin dik olacaklarını gösteriniz.

10. Bir topun konum vektörü, $t \geq 0$ için

$$\mathbf{r}(t) = (90\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (90\sqrt{2}t^2)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$$

biçiminde veriliyor.

(a) Başlangıç anındaki konum ve hız vektörlerini bulunuz.

(b) $t = 4$ anında topun yere çarpacağını gösteriniz. Bu anda top atış noktasından ne kadar uzaklaşmış olur.

11. $t \geq 0$ için $F(t) = (t \cos 2t)\,i + (t \sin 2t)\,j + e^t\,k$ olsun. Her $t \geq 0$ için

$$\|h(t)\mathbf{F}(t)\| = 1$$

olacak şekilde bir reel değerli h fonksiyonu bulunuz.

12. $\mathbf{F}(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k},\quad t \geq 0$

olsun. $F(t)$ ile $F'(t)$ arasındaki açının t den bağımsız olduğunu gösteriniz.

13. u ile v sabit vektörler ve f de ikinci mertebeden türevlenebilen bir reel değerli fonksiyon olsun. $F(t) = u + v\,f(t)$ fonksiyonu için

$$F'(t) \times F''(t) = 0$$

olacağını gösteriniz.

☞ ÇÖZÜMLER

1. t |t| ile cost her yerde süreklidir. ⟦t^2-2t⟧ de t = 1 hariç tüm tam sayılarda süreksizdir. Dolayısıyla **F** fonksiyonu Z–{1} de süreksizdir.

2. $\mathbf{F}(t).\mathbf{G}(t)=\frac{4t+8t^2}{(1+t^2)^3}-\frac{4t+8t^2}{(1+t^2)^3}=0$ olduğundan $\left[\mathbf{F}(t).\mathbf{G}(t)\right]'=0$ dır.

3. a. $(\mathbf{F}\circ g)'(t)=\mathbf{F}'(g(t)).g'(t)=\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{i}-4e^{\sqrt{t}}\mathbf{j}+\frac{1}{\left(\sqrt{t}\right)^2}\mathbf{k}\right]\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2t}\mathbf{i}-2\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathbf{j}+\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\mathbf{k}$

4. $\|\mathbf{F}(t)\|^2=\left(\frac{4t}{1+4t^2}\right)^2+\left(\frac{1-4t^2}{1+4t^2}\right)^2=\frac{16t^4+8t^2+1}{(1+4t^2)^2}=1\Rightarrow\|\mathbf{F}(t)\|=1 \Rightarrow \mathbf{F}(t).\mathbf{F}'(t)=0$ dır.

5. $\mathbf{F}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F}'(t_0)=-\sin t_0\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F}(\pi)=-\mathbf{i}$, $\mathbf{F}(0)=\mathbf{i}$

   $\frac{\mathbf{F}(\pi)-\mathbf{F}(o)}{\pi-0}=-\frac{2}{\pi}\mathbf{i}$ vektörünün $\mathbf{F}'(t_0)=\sin t_0\,\mathbf{i}+\cos t_0\,\mathbf{j}$ vektörüne paralel olması için $\cos t_0=0 \Rightarrow t_0=\frac{\pi}{2}$

   olmalıdır. $\frac{\mathbf{F}(\pi)-\mathbf{F}(o)}{\pi-0}=\mathbf{F}'(t_0)\Rightarrow-\frac{2}{\pi}\mathbf{i}=-\sin t_0\,\mathbf{i}+\cos t_0\,\mathbf{j}$

   olması için $\cos t_0=0$ ve $\sin t_0=-\frac{2}{\pi}$ olmalıdır. Bunlar sağlanacak biçimde bir t_0 yoktur.

6. **F**(t) = sinti – costj, **F**″(t) = –**F**(t) dir. Şu halde **F**″(t) ile **F**(t) vektörleri her t ∈ R için zıt yönlü vektörlerdir. Hiçbir t için aynı yönlü olamazlar.

7. $\mathbf{F}(t)=e^{-2t}\mathbf{i}+e^{2t}\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}'(t)=-2e^{-2t}\mathbf{i}+2e^{2t}\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{F}''(t)=4e^{-2t}\mathbf{i}+4e^{2t}\mathbf{j}$

   olacağından $\forall t\in R$ için $\mathbf{F}''(t)=4\mathbf{F}(t)$ dir. Dolayısıyla $\forall t\in R$ için $\mathbf{F}''(t)$ ile $\mathbf{F}(t)$ aynı yönlü paralel vektörlerdir.

8. **F**(t) ile **F**″(t) paralel olsun. Bu takdirde **F**″(t) = λ**F**(t) olacak biçimde bir λ sabiti vardır.

   $\mathbf{F}(t)\times\mathbf{F}''(t)=\mathbf{F}(t)\times\lambda\mathbf{F}(t)=\lambda(\mathbf{F}(t)\times\mathbf{F}(t))=\lambda.\mathbf{0}=\mathbf{0}$

9. $\mathbf{r}_1(t)=t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t)=t^2\mathbf{i}+(t+1)\mathbf{j}+(2-t^2)\mathbf{k} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t=t^2 \\ 2t=t+1 \\ t^2=2-t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow t=1$ bulunur.

   $\mathbf{r}_1'(t)=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2t\mathbf{k}\Rightarrow\mathbf{r}_1'(1)=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}\Rightarrow\|\mathbf{r}_1'(1)\|=3$

   $\mathbf{r}_2'(t)=2t\mathbf{i}+\mathbf{j}-2t\mathbf{k}\Rightarrow\mathbf{r}_2'(1)=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}\Rightarrow\|\mathbf{r}_2'(1)\|=3$

   $\mathbf{T}_1(1)=\frac{\mathbf{r}_1'(1)}{\|\mathbf{r}_1'(1)\|}=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ ve $\mathbf{T}_2(1)=\frac{\mathbf{r}_2'(1)}{\|\mathbf{r}_2'(1)\|}=\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ olduğundan

   $\mathbf{T}_1(1).\mathbf{T}_2(1)=\frac{1}{9}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}).(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})=\frac{1}{9}(2+2-4)=0$ dır. Dolayısıyla $\mathbf{T}_1$ ve $\mathbf{T}_2$ teğet vektörleri birbirine diktir.

10. (a) $t=0$ için $\mathbf{r}(0)=0$ dır.

$$\mathbf{V}(t)=\mathbf{r}'(t)=90\sqrt{2}\,\mathbf{i}+180\sqrt{2}t\,\mathbf{j}+(64-32t)\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{V}(0)=90\sqrt{2}\,\mathbf{i}+64\,\mathbf{k}$$

(b) $f_3(t)=(64t-16t^2)$ olduğundan $t=4$ için $f_3(4)=(64.4-16.16)=0$ olur.

$t=4$ için $\mathbf{r}(4)=90\sqrt{2}\,4\mathbf{i}+90\sqrt{2}.4^2\,\mathbf{j}$ olacağından

$$L=\|\mathbf{r}(4)\|=\left[\left(90\sqrt{2}.4\right)^2+\left(90\sqrt{2}.16\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left(90^2.2^5+90^2 2^{10}\right)^{\frac{1}{2}}=2880 \text{ birim olur.}$$

11. $\|h(t)\mathbf{F}(t)\|=1 \Rightarrow |h(t)|\|\mathbf{F}(t)\|=1 \Rightarrow |h(t)|\left(t^2\cos^2 2t+t^2\sin^2 2t+e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}}=1$

$$|h(t)|\left(2t^2+e^{2t}\right)^{\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow |h(t)|=\left(2t^2+e^{2t}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow h(t)=\left(2t^2+e^{2t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

12. $\mathbf{F}(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}\mathbf{i}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{j}+\mathbf{k}, \quad t>0$

$$\mathbf{F}'(t)=\frac{2t+2t^2-4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\mathbf{i}+\frac{\left(-2t-2t^3-2t+2t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}\mathbf{j}=\frac{2-2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\mathbf{i}-\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}(t).\mathbf{F}'(t)=\frac{4t-4t^3-4t+4t^3}{\left(1+t^2\right)^3}=0 \Rightarrow \mathbf{F} \text{ ile } \mathbf{F}' \text{ birbirine diktir.}$$

13. $\mathbf{F}(t)=\mathbf{u}+\mathbf{v}f(t) \Rightarrow \mathbf{F}'(t)=\mathbf{v}f'(t) \Rightarrow \mathbf{F}''(t)=\mathbf{v}f''(t)$

$$\mathbf{F}'(t)\times\mathbf{F}''(t)=\mathbf{v}f'(t)\times\mathbf{v}f''(t)=f'(t)f''(t)(\mathbf{v}\times\mathbf{v})=f'(t).f''(t).\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

byns

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

13 ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM KÜMESİ, LİMİT VE SÜREKLİLİK

TANIM

D düzlemin bir bölgesi, f de D nin her bir (x, y) noktasına bir $f(x, y)$ reel sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bir **iki değişkenli fonksiyon** adı verilir.

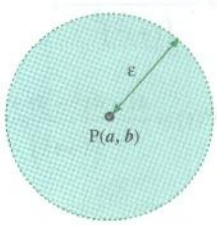
B uzayın bir bölgesi, f de B nin her bir (x, y, z) noktasına bir $f(x, y, z)$ sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bir **üç değişkenli fonksiyon** denir. Daha çok değişkenli fonksiyonlar benzer şekilde tanımlanır.

TANIM

$P(a, b)$ bir sabit nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$D(P, \varepsilon) = \{ (x, y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \}$$

kümesine $P(a, b)$ noktasının **ε – komşuluğu** denir.



P nin ε - komşuluğu

TANIM

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için, } \exists \delta > 0 \text{ öyle ki } |x-a| < \delta$$

ve $|y-b| < \delta$ bağıntılarını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x, y) noktaları için $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ dur.

TEOREM

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1 \quad ve \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$$

limitleri var olsun.

(a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2$,

(b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = L_1 . L_2$,

(c) her $c \in R$ için $\lim_{(x,y)\to(a,b)} c f(x,y) = c . L_1$,

(d) $g(x, y) \neq 0$ ve $L_2 \neq 0$ ise $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$.

TANIM

f, A kümesinde tanımlı bir fonksiyon ve (a, b), A kümesinin bir yığılma noktası olsun. f, (a,b) noktasında tanımlı ve

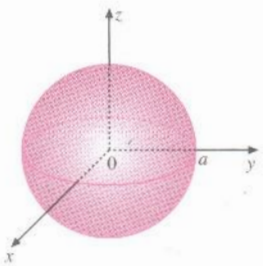
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

ise f fonksiyonu (a, b) noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise A üzerinde süreklidir denir.

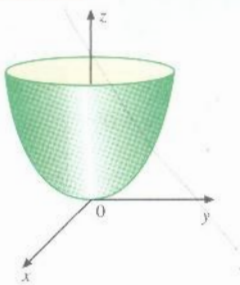
BAZI ÖZEL YÜZEYLER

Küre



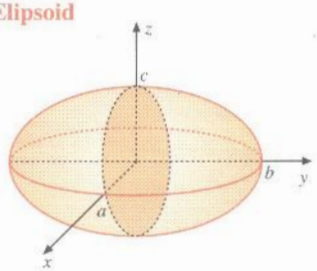
$$x^2 + y^2 = z^2 = a^2$$

Paraboloid



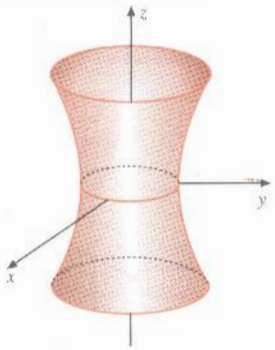
$$z = x^2 + y^2$$

Elipsoid



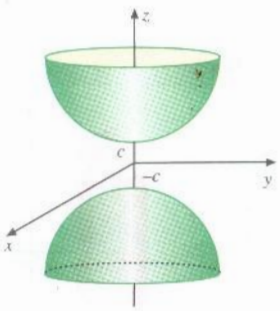
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Tek kanatlı hiperboloid



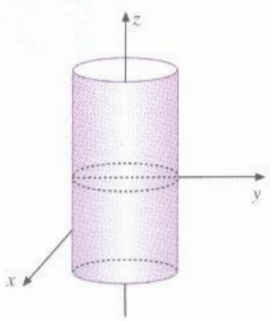
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

İki kanatlı hiperboloid



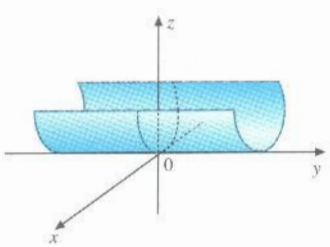
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Dairesel silindir



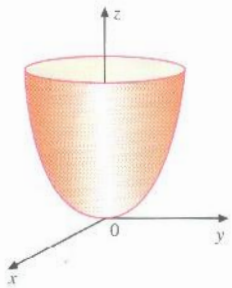
$$x^2 + y^2 = a^2$$

Parabolik silindir



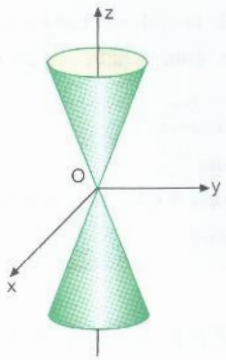
$$z = ax^2$$

Eliptik paraboloid



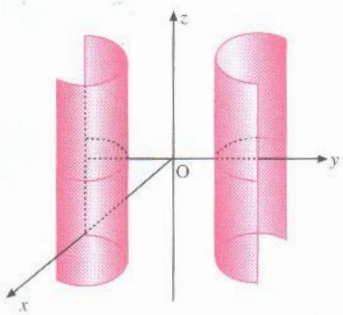
$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Koni



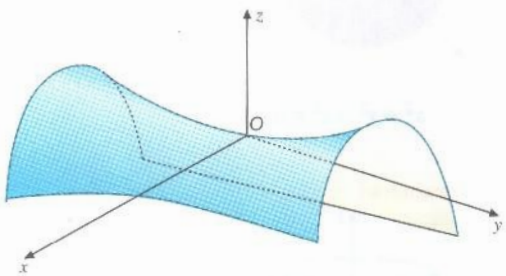
$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Hiperbolik silindir



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Hiperbolik paraboloid



$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad (c > 0)$$

byns

PROBLEMLER

- Çok Değişkenli Fonksiyonlar
- Çok Değişkenli Fonksiyonların Limit ve Sürekliliği
- Bazı Yüzeyler

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların tanım kümelerini bulup kartezyen düzlemde gösteriniz.

   (a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

   (b) $g(x, y) = \ln x + \ln y$

   (c) $h(x, y) = \sqrt{xy} + \ln(x - y)$

   (d) $k(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + x^2 + y^2 + 1$

   (e) $l(x, y) = \sqrt{x - y} + 3x - 4y$

   (f) $m(x, y) = \sqrt{xy - x^4} + xy + 1$

2. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

   (a) $f(x, y) = e^{-2(x^2+y^2)}$

   (b) $g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

   (c) $h(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$

   (d) $k(x, y) = e^{\sin(xy)}$

3. $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}}$ fonksiyonunun tanım kümesini kartezyen düzlemde gösteriniz.

4. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

   (a) $f(x, y)\ 4 - x^2 - y^2$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $f(x, y) = x + y$

   (d) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

   (e) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

   (f) $f(x, y) = x^2$

5. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 3}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \sin y}{x^2 + 1}$

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^y \sin x}{x}$

6. Aşağıda verilen fonksiyonların (0,0) noktasında bir limite sahip olmadığını gösteriniz.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{y}$

7. $$f(x,y) = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$$
   fonksiyonunun her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

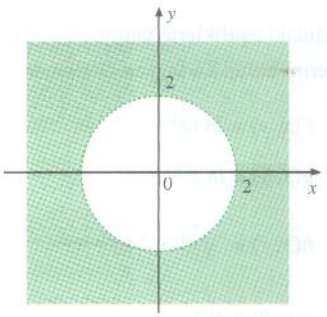
8. $$f(x,y) = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^3 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$$
   fonksiyonu (0,0) noktasında sürekli midir?

9. $f(x, y) = sgn(xy)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Süreksizlik noktalarını belirtiniz.

☞ ÇÖZÜMLER

1. a) $f(x, y) = ln(x^2 + y^2 - 4)$ fonksiyonunun tanımlı olması için

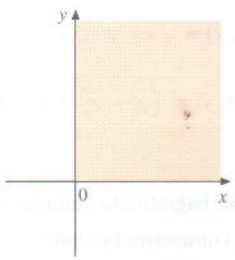
$x^2 + y^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 4$ olmalıdır. Bu bölge $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin dış bölgesidir.



b) $f(x, y) = \ln x + \ln x$ fonksiyonunun tanımlı olması için

$x > 0$ ve $y > 0$

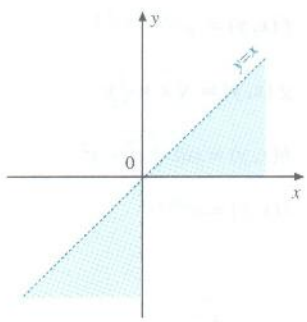
olmalıdır. O halde tanım bölgesi I. bölgedir.



c) $h(x, y) = \sqrt{xy} + ln(x - y)$ fonksiyonunun tanımlı olması için

$xy \geq 0$ ve $x - y > 0$

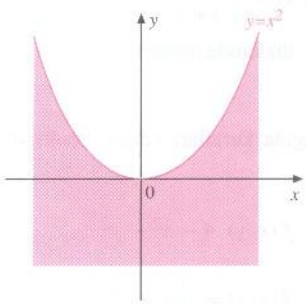
olmalıdır. $xy > 0$ olduğundan tanım kümesi I. veya III. bölgededir. $x - y > 0 \Rightarrow y < x$ olacağından tanım kümesi $y = x$ doğrusunun altında kalan noktaların kümesidir. O halde tanım kümesi I. ve III. bölgelerde $y = x$ doğrusunun altında bulunan noktaların kümesidir. Bu bölge yanda çizilmiştir.



d) Fonksiyonunun tanımlı olması için

$x^2 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x^2$

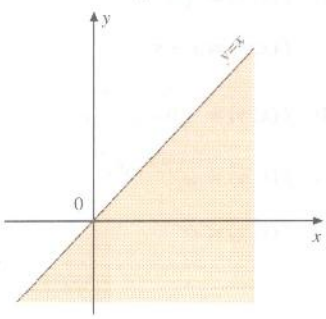
olmalıdır. O halde tanım bölgesi $y = x^2$ parabolünün altında kalan noktalar ile parabolün noktalarıdır.



e) Fonksiyonun tanımlı olması için

$x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x$

olmalıdır. İstenen bölge, $y = x$ doğrusu ile onun altında kalan noktaların birleşimidir.

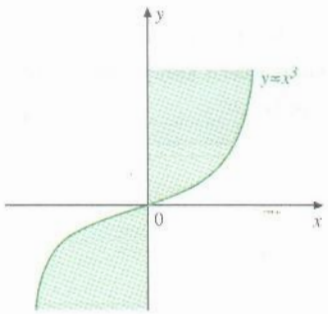


f) $xy - x^4 \geq 0 \Rightarrow x(y - x^3) \geq 0 \Rightarrow$

$(x \geq 0 \wedge y - x^3 \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y - x^3 \leq 0) \Rightarrow$

$(x \geq 0 \wedge y \geq x^3) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq x^3)$

olur. Tanım kümesi, I. ve IV. bölgede $y = x^3$ eğrisinin üst tarafında bulunan noktaların kümesi ile, II. ve III. bölgelerde $y = x^3$ eğrisinin alt tarafında bulunan noktaların kümesinin birleşimidir.



2. Verilen fonksiyon her (x,y) noktası için tanımlıdır.

a) $x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow -(x^2 + y^2) \leq 0 \Rightarrow e^{-2(x^2+y^2)} \leq 1$

olur. $f(0, 0) = 1$ dir. Diğer taraftan çok büyük x ve y değerleri için $e^{2(x^2+y^2)}$ sayısı sıfıra istenildiği kadar yakın değerler alabileceğinden görüntü kümesi (0,1] aralığıdır.

b) $g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olmalıdır.

Tanım kümesi $[0, +\infty] \times [0, +\infty)$ dır. $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ için $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0 + 0 = 0$ olduğundan fonksiyon en küçük oeğerini (0,0) da alır. Bu değer $f(0, 0) = 0$ dır. x ve y çok büyük seçilerek $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ifadesi istenildiği kadar büyük yapılabilir. O halde görüntü kümesi üstten sınırlı değildir. Buna göre görüntü kümesi $(0, +\infty)$ aralığıdır.

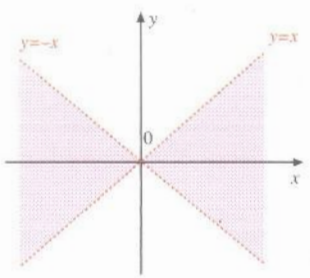
c) Fonksiyon her yerde tanımlıdır. Tanım kümesi R^2 dir. Sinüs fonksiyonu -1 ile 1 arasında değerler aldığından, görüntü kümesi $[-1, 1]$ dir.

d) Fonksiyon her yerde tanımlı olduğundan görüntü kümesi R^2 dir. $-1 \leq sin(xy) \leq 1$ olduğundan $e^{-1} \leq e^{sin(xy)} \leq e^1$ dir. Görüntü kümesi $[e^{-1}, e]$ aralığıdır.

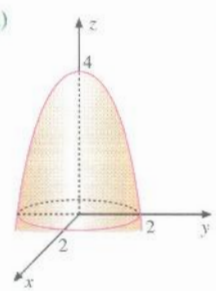
3. $\frac{x-y}{x+y} \geq 0$ olmalıdır. Bunun için $x - y$ ile $x + y$ aynı işaretli olmalıdır. Bu durumda

$(x - y \geq 0$ ve $x + y > 0)$ veya $(x - y \leq 0$ ve $x + y < 0) \Rightarrow$

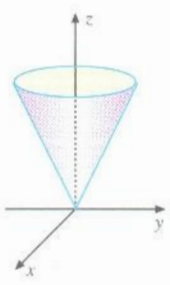
$(y \leq x$ ve $y > -x)$ veya $(y \geq x$ ve $y < -x)$ olmalıdır. Bu bölge yanda gösterilmiştir.



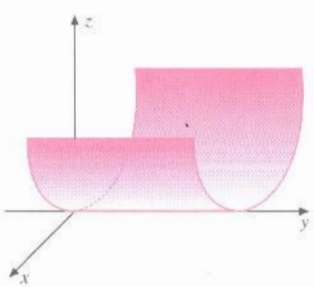
4. a)



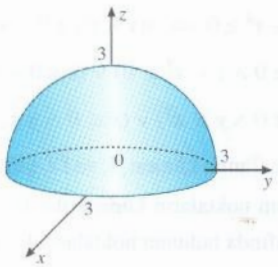
b)



c)

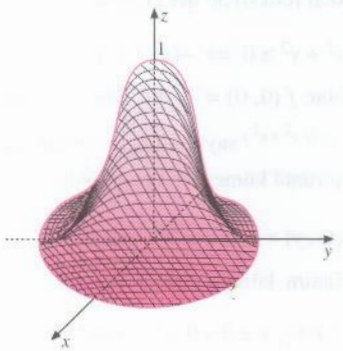


d) $z=\sqrt{9-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=3^2$ denklemi, yarıçapı 3 birim olan merkezil küreyi gösterir. O halde verilen denklem kürenin üst yarısıdır.

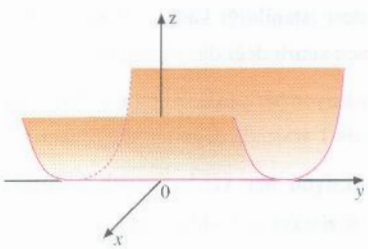


e) $0 \le e^{-\left(x^2+y^2\right)} \le 1$ dir. $f(x,y)=1 \Leftrightarrow x=y=0$.

$f(x,y)=f(-x,y)=f(x,-y)=f(-x,-y)$ olduğundan yüzey xOz ve düzlemlerine göre simetriktir.



f) $f(x,y)=x^2$ yüzeyini çizmek için $z=x^2$ parabolünü çizip bunu Oy - ekseni yönünde kendisine paralel kalacak biçimde kaydırmak yeterlidir.



KISMİ TÜREVLER

TANIM

$A \subset R^2$, $f: A \to R$, $z = f(x,y)$ bir fonksiyon ve $(a,b) \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

limiti varsa bu limite f nin **x değişkenine göre (a, b) noktasındaki kısmi türevi** denir.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|(a,b), \quad f_x(a,b)$$

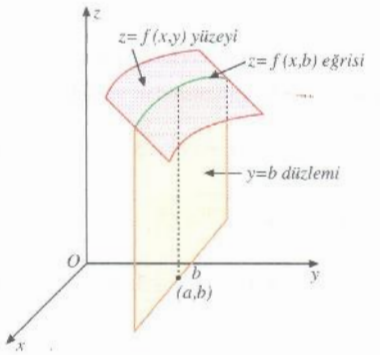
sembollerinden biri ile gösterilir. Benzer şekilde

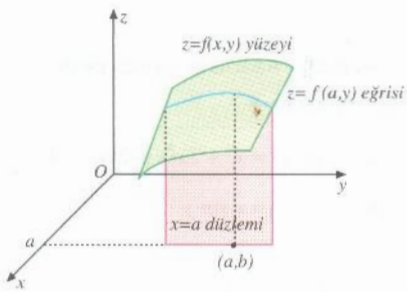
$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

limiti varsa bu limite f nin **y değişkenine göre (a, b) noktasındaki kısmi türevi** denir.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|(a,b), \quad f_y(a,b)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.





YÜKSEK MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLER

f fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevlerinin de x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri var ise bu türevlere f nin **ikinci mertebeden kısmi türevleri** denir. Buna göre f nin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

olacaktır.

TEOREM

Eğer f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx} türevleri (a, b) noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı ve (a, b) noktasında sürekli iseler

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

dir.

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

PROBLEMLER

- Kısmi Türevler
- Yüksek Mertebeden Kısmi Türevler

1. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların karşılarında yazılı kısmi türevlerini tanımdan yararlanarak hesaplayınız.

   (a) $f(x, y) = x^3y + xy^3 - 3x^2y^2$, $f_x(1, 1)$, $f_y(1, 1)$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$, $f_x(1, 0)$, $f_y(1, 0)$

   (c) $f(x, y) = 1 - x + y + 3x^2y$, $f_x(1, 2)$, $f_y(1, 2)$

2. Aşağıdaki ifadelerin birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

   (a) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + 4x - y$

   (b) $f(x, y) = x \sin y$

   (c) $f(x, y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)$

   (d) $f(x, y) = \arcsin\left(\sqrt{xy}\right)$

   (e) $f(x, y) = e^{xy} \ln x$

   (f) $f(x, y) = x \arctan \frac{y}{x}$

   (g) $f(x, y) = e^x(\cos y - \sin y)$

   (h) $f(x, y) = e^{xy}(\cos xy + \sin xy)$

   (i) $f(x, y) = x^y$

3. Aşağıdaki ifadelerin birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

   (a) $f(x, y, z) = x^2 e^y \ln z$

   (b) $f(x, y, z) = x^3 - xyz$

   (c) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^4$

   (d) $f(x, y, z) = (4 - x^2 - y^2 - z^2)e^{-xyz}$

   (e) $f(x, y, z) = \arcsin(xyz)$

4. Aşağıdaki ifadelerin ikinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$

   (b) $f(x, y) = x^2y + xy^2 + \sin y$

   (c) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$

   (d) $f(x, y) = e^x + x \ln y + y \ln x$

5. Aşağıdaki ifadelerin f_{xy} ve f_{yx} karışık türevlerini hesaplayıp eşit olduklarını gösteriniz.

   (a) $f(x, y) = \ln(3x + 4y)$

   (b) $f(x, y) = e^x + x \ln y + y \ln x$

   (c) $f(x, y) = e^{-3x} \cos y$

   (d) $f(x, y) = \sin xy + \arctan xy$

   (e) $f(x, y) = e^{x-y} \sin(x + y)$

6. $f(x, y, z) = e^{xyz}$ fonksiyonu için

   f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}, f_{xz}, f_{yz}, f_{zz} ve f_{xyz}

   türevlerini hesaplayınız.

7. $f(x, y) = \sin xy$ fonksiyonu için

   $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ olacağını gösteriniz.

8. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların karşılarında yazılı denklemleri sağladığını gösteriniz.

   (a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $xz_x + yz_y = z$

   (b) $z = \arcsin \frac{x - y}{x + y}$, $xz_x + yz_y = 0$

   (c) $z = ye^{x/y}$, $xz_x + yz_y = z$

   (d) $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$, $xz_x + yz_y = \frac{1}{2}z$

   (e) $z = x^2 \arctan \frac{y}{x}$, $xz_x + yz_y = 2z$

9. Aşağıdaki ifadelerin Laplace denklemi denilen $z_{xx} + z_{yy} = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Bu tip fonksiyonlara harmonik fonksiyon denir.

(a) $z = x^2 - y^2$

(b) $z = e^x \cos y$

(c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

(d) $z = \ln(x^2 + y^2)$

(e) $z = \sin x \sinh(\pi - y)$

(f) $z = \sinh 2x \sin 2y$

(g) $z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

(h) $z = \sin 3x \sinh 3y$

10. Aşağıdaki fonksiyonların üç boyutlu Laplace denklemi denilen

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

(b) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2)^{-1/2}$

(c) $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$

(d) $f(x, y, z) = \cos x \cos 4y \sin h\, 5z$

11. c bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

tipindeki denklemlere dalga denklemi denir. Aşağıdaki fonksiyonların dalga denklemini sağladığını, yani dalga denkleminin bir çözümü olduklarını gösteriniz.

(a) $u(x, t) = \sin bcx \sin bt$

(b) $u(x, t) = \sin(cx + t)$

(c) $u(x, t) = \cos(2cx + 2t)$

(d) $u(x, t) = \sin(cx + t)\cos(2cx + 2t)$

(e) $u(x, t) = \ln(2cx + 2t)$

12. c bir sabit olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

tipindeki denklemlere bir ısı (veya diffüzyon) denklemi adı verilir. Aşağıdaki fonksiyonların bir ısı denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz. Her bir fonksiyon için c sabitini bulunuz.

(a) $u(x, t) = e^{ax+bt}$

(b) $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/at}$

(c) $u(x,t) = e^{-n^2kt} \sin nx$

13. $u(x, y, t) = e^{-(m^2+n^2)ct}$

fonkisonunun iki boyutlu ısı denklemi denilen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

denklemini, uygun seçilen m ve n değerleri için sağladığını gösteriniz.

14. $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ fonksiyonu için

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

15. $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

fonksiyonu için

$$u_x + u_y + u_z = \frac{3}{x + y + z}$$

olduğunu gösteriniz.

16. $u = \ln(\tan x + \tan y + \tan z)$ fonksiyonunun

$$\sin 2x \frac{\partial u}{\partial x} + \sin 2y \frac{\partial u}{\partial y} + \sin 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 2$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

17. $$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{x-y}\right), & x \neq y \text{ ise} \\ 0, & x = y \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için

$$f_{xy}(0, 0) = -1, \quad f_{yx}(0, 0) = 1$$

olacağını gösteriniz.

☞ ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x,y) = x^3y + xy^3 - 3x^2y^2$

$$f_x(1,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3 1+(1+h).1-3(1+h)^2.1+1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^3-2h}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2-2) = -2.$$

$$f_y(1,1) = \lim_{k\to 0}\frac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{(1+k)+(1+k)^3-3(1+k)^2+1}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{k^3-2k}{h} = \lim_{k\to 0}(k^2-2) = -2.$$

(b) $f(x,y) = \sqrt{4x^2+y^2}$

$$f_x(1,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4(1+h)^2}-\sqrt{4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)-2}{h} = 2.$$

$$f_y(1,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(1,k)-f(1,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{4+k^2}-2}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{4+k^2-4}{k(\sqrt{4+k^2}+2)} = \lim_{k\to 0}\frac{k}{\sqrt{4+k^2}+2} = \frac{0}{4} = 0.$$

(c) $f(x,y) = 1 - x + y + 3x^2y$

$$f_x(1,2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-(1+h)+2+6(1+h)^2-8}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6h^2+11h}{h} = \lim_{h\to 0}(6h+11) = 11.$$

$$f_y(1,2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1,2+k)-f(1,2)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{2+k+3(2+k)-8}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{4k}{k} = \lim_{k\to 0}4 = 4.$$

2. (a) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + 4x - y$

$f_x(x,y) = 3x^2 + 6xy + 2y^2 + 4$

$f_y(x,y) = 3x^2 + 4xy - 1$

(b) $f(x,y) = x\,\sin y$

$f_x(x,y) = \sin y, \quad f_y(x,y) = x\cos y.$

(c) $f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \ln(xy) - \ln(x^2+y^2)$

$$f_x(x,y) = \frac{y}{xy} - \frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)}$$

(d) $f(x,y) = \arcsin\sqrt{xy}$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-xy}} \cdot \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{y}{2\sqrt{xy-x^2y^2}}, \qquad f_y(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{xy-x^2y^2}}$$

(e) $f(x,y) = e^{xy}\ln x$

$$f_x(x,y) = ye^{xy}\ln x + e^{xy}\cdot\frac{1}{x} = e^{xy}\left(y\ln x + \frac{1}{x}\right), \qquad f_y(x,y) = xe^{xy}\ln x.$$

(f) $f(x,y) = x\arctan\frac{y}{x}$

$$f_x(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + \frac{x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \arctan\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = x\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

(g) $f(x,y) = e^x(\cos y - \sin y)$

$f_x(x,y) = e^x(\cos y - \sin y)$, $f_y(x,y) = e^x(-\sin y - \cos y) = -e^x(\sin y + \cos y)$

(h) $f(x,y) = e^{xy}(\cos xy + \sin xy)$

$f_x(x,y) = ye^{xy}(\cos xy + \sin xy) + e^{xy}(-y\sin xy + y\cos xy) = 2e^{xy}y\cos xy$

$f_y(x,y) = 2e^{xy}x\cos xy$ dir. Bunu bulmak için x ile y nin rollerini değiştirmek yeterlidir.

(i) $f(x,y) = x^y$

$f_x(x,y) = yx^{y-1}$, $f_y(x,y) = x^y \cdot \ln x$ dir.

3. (a) $f_x(x,y,z) = 2xe^y\ln z$, $f_y(x,y,z) = x^2e^y\ln z$, $f_z(x,y,z) = \frac{x^2e^y}{z}$

(b) $f(x,y,z) = 3x^2 - yz$, $f_y(x,y,z) = -xz$, $f_z(x,y,z) = -xy$.

(c) $f_x(x,y,z) = 3x^2$, $f_y(x,y,z) = 2y$, $f_z(x,y,z) = 4x^3$

(d) $f_x(x,y,z) = -2xe^{-xyz} - yze^{-xyz}(4 - x^2 - z^2) = -(2x + 4yz - x^2yz - y^3z - yz^3)e^{-xyz}$

$f_y(x,y,z) = -2ye^{-xyz} - xze^{-xyz}(4 - x^2 - y^2 - z^2) = -(2y + 4xy - x^3y - xy^3 - xyz^2)e^{-xyz}$

$f_z(x,y,z) = -2ze^{-xyz} - xye^{-xyz}(4 - x^2 - y^2 - z^2) = -(2z + 4xy - x^3y - xy^3 - xyz^2)e^{-xyz}$

(e) $f_x(x,y,z) = \frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$, $f_y(x,y,z) = \frac{xz}{\sqrt{1-x^2-y^2z^2}}$, $f_z(x,y,z) = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$

4. (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$

$f_x(x,y) = 2x - 3y, \quad f_{xx}(x,y) = 2 \; f_{xy}(x,y) = -3, \quad f_y(x,y) = 2y - 3x \Rightarrow f_{yy}(x,y) = 2.$

(b) $f(x,y) = x^2y + xy^2 + \sin x$

$f_x(x,y) = 2xy + y^2 + \cos x, \quad f_{xx}(x,y) = 2y - \sin x, \quad f_{xy}(x,y) = 2x + 2y, \quad f_y(x,y) = x^2 + 2xy, \quad f_{yy} = 2x$

(c) $f(x,y) = \arcsin\frac{y}{x}$

$$f_x(x,y) = \frac{-y/x^2}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} = -\frac{y}{x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1.\sqrt{x^2-y^2} + \frac{x.x}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2\left(x^2-y^2\right)} = \frac{2x^2-y^2}{x^2\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$f_{xy} = -x\sqrt{x^2-y^2} - \frac{y^2/\sqrt{x^2-y^2}}{x^2\left(x^2-y^2\right)} = \frac{x\left(x^2-y^2\right)-y^2}{x^2\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{y}{\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}}$$

(d) $f(x,y) = e^x + x\ln y + y\ln x$

$f_x(x,y) = e^x + \ln y + \frac{y}{x}, \quad f_{xx} = e^x - \frac{y}{x^2}, \quad f_{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}, \quad f_y = \frac{x}{y} + \ln x \Rightarrow f_{yy} = -\frac{x}{y^2}$

5. (a) $f(x,y) = \ln(3x + 4y)$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) = \frac{3}{3x+4y} &\Rightarrow f_{xy}(x,y) = -\frac{12}{(3x+4y)^2} \\ f_y(x,y) = \frac{4}{3x+4y} &\Rightarrow f_{yx}(x,y) = -\frac{12}{(3x+4y)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

(b) $f(x,y) = e^x + x\ln y + y\ln x$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) = e^x + \ln y + \frac{y}{x} &\Rightarrow f_{xy}(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \\ f_y(x,y) = \frac{x}{y} + \ln x &\Rightarrow f_{yx}(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

(c) $f(x,y) = e^{-3x}\cos y$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= -3e^{-3x}\cos y \;\Rightarrow\; f_{xy}(x,y) = 3e^{-3x}\sin y \\ f_y(x,y) &= -e^{-3x}\sin y \;\Rightarrow\; f_{yx}(x,y) = 3e^{-3x}\sin y \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

(d) $f(x,y) = \sin xy + \arctan xy$

$$f_x(x,y) = y\cos xy + \frac{y}{1+x^2y^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \cos xy - xy\sin xy + \frac{\left(1+x^2y^2\right)-2x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2} = \cos xy - xy\sin xy + \frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$$

$$f_y(x,y) = x\cos xy + \frac{x}{1+x^2y^2}$$

$$f_{yx}(x,y) = \cos xy - xy\sin xy + \frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2} = \cos xy - xy\sin xy + \frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$$

(e) $f(x,y) = e^{x-y}\sin(x+y)$

$f_x(x,y) = e^{x-y}\sin(x+y) + e^{x-y}\cos(x+y) = e^{x-y}\left[\sin(x+y) + \cos(x+y)\right]$

$f_{xy}(x,y) = -e^{x-y}\left[\sin(x+y) + \cos(x+y)\right] + e^{x-y}\left[\cos(x+y) - \sin(x+y)\right]$

$= e^{x-y}\left[-\sin(x+y) - \cos(x+y) + \cos(x+y) - \sin(x+y)\right] = -2e^{x-y}\sin(x+y)$

$f_y(x,y) = -e^{x-y}\sin(x+y) + e^{x-y}\cos(x+y) = e^{x-y}\left[-\sin(x+y) + \cos(x+y)\right]$

$f_{yx}(x,y) = -e^{x-y}\left[-\sin(x+y) + \cos(x+y)\right] + e^{x-y}\left[-\cos(x+y) - \sin(x+y)\right] = -2e^{x-y}\sin(x+y).$

6. $f(x,y,z) = e^{xyz}$

$f_x = yze^{xyz}$, $f_y = xze^{xyz}$, $f_z = xye^{xyz}$, $f_{xx} = y^2z^2e^{xyz}$, $f_{yy} = x^2z^2e^{xyz}$, $f_{zz} = x^2y^2e^{xyz}$

$f_{xy} = xyz^2e^{xyz}$, $f_{yx} = xyz^2e^{xyz}$, $f_{zx} = xzy^2e^{xyz}$, $f_{xz} = xy^2e^{xyz}$, $f_{yz} = x^2yze^{xyz}$, $f_{zy} = x^2yze^{xyz}$, $f_{xyz} = x^2y^2z^2e^{xyz}$

7. $f(x,y) = \sin xy$

$f_x = y\cos xy$, $f_y = x\cos xy$, $f_{xx} = -y^2\sin xy$, $f_{xxy} = -2y\sin xy - xy^2\cos xy.$

$f_{xy} = \cos xy - xy\sin xy$, $f_{xyx} = -y\sin xy - y\sin xy - xy^2\cos xy = -2y\sin xy - xy^2\cos xy.$

$f_{yxx} = -y\sin xy - y\sin xy - xy^2\cos xy = -2y\sin xy - xy^2\cos xy.$

olur. Buradan $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ olduğu görülür.

8. (a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $xz_x+yz_y=z$

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$xz_x+yz_y=x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}=z$$

(b) $z=arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$ $\qquad xz_x+yz_y=0$

$$z_x=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2}}\left(\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2}\right)=\frac{2y}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}$$

$$z_y=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2}}\left(\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}\right)=\frac{-2x}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2(x-y)^2}}$$

$$xz_x+yz_y=\frac{2xy}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}-\frac{2xy}{(x+y)\sqrt{(x+y)^2.(x-y)^2}}=0$$

(c) $z=ye^{x/y}$

$$z_x=y.\frac{1}{y}e^{x/y}=e^{x/y}, \qquad z_y=e^{x/y}+y.\left(-\frac{x}{y^2}\right)e^{x/y}=e^{x/y}-\frac{x}{y}e^{x/y}$$

$$xz_x+yz_y=xe^{x/y}+ye^{x/y}(1-\frac{x}{y})=e^{x/y}(x+y-x)=ye^{x/y}=z.$$

(d) $z=\sqrt{x}\,sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\qquad xz_x+yz_y=\dfrac{z}{2}$

$$z_x=\frac{1}{2\sqrt{x}}sin\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^{\frac{3}{2}}}cos\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z_y=\frac{1}{\sqrt{x}}cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$xz_x+yz_y=\frac{\sqrt{x}}{2}sin\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{\sqrt{x}}cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{\sqrt{x}}cos\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2}sin\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{z}{2}$$

(e) $z=x^2\,arctan\dfrac{y}{x}$, $\qquad xz_x+yz_y=2z$

$$z_x=2xarctan\frac{y}{x}-x^2.\frac{y}{x^2}.\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=2x\,arctan\frac{y}{x}-\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

$$z_y=x^2.\frac{1}{x}.\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$xz_x+yz_y=2x^2\,arctan\frac{y}{x}-\frac{x^3y}{x^2+y^2}+\frac{x^3y}{x^2+y^2}=2x^2\,arctan\frac{y}{x}=2z$$

9. (a) $z = x^2 - y^2$

$z_x = 2x,\ z_{xx} = 2,\quad z_y = -2y,\quad z_{yy} = -2$

$z_{xx} + z_{yy} = 2 + (-2) = 0 \Rightarrow z_{xx} + z_{yy} = 0.$

(b) $z = e^x cosy.$

$z_x = e^x cosy,\quad z_{xx} = e^x cosy$

$z_y = -e^x siny,\quad z_{yy} = -e^x cosy$

$z_{xx} + z_{yy} = e^x cosy - e^x cosy = 0$

(c) $z = arctan\dfrac{y}{x}$

$$z_x = \frac{-y}{x^2+y^2},\quad z_{xx} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad z_y = \frac{y}{x^2+y^2},\quad z_{yy} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0.$$

(d) $z = ln(x^2 + y^2)$

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2},\quad z_y = \frac{2y}{x^2+y^2},\quad z_{xx} = \frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad z_{yy} = \frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0.$$

(e) $z = sinx\ sinh(\pi - y)$

$z_x = cosx\ sinh(\pi - y),\quad z_{xx} = -sinx\ sinh(\pi - x)$

$z_y = sinx\ cosh(\pi - y),\quad z_{yy} = sinx\ .\ sinh(\pi - x)$

$z_{xx} = z_{yy} = 0.$

(f) $z = sinh2x\ sin2y.$

$z_x = 2cosh2x\ .\ sin2y,\quad z_{xx} = 4sinh2x\ sin2y.$

$z_y = 2sinh2x\ cos2y,\quad z_{yy} = -4sinh2x\ sin2y.$

$z_{xx} + z_{yy} = 0.$

(g) $z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$z_x = 4x^3 - 12xy^2,\ z_{xx} = 12x^2 - 12y^2,\ z_y = -12x^2y + 4y^3,\ z_{yy} = -12x^2 + 12y^2$

$z_{xx} + z_{yy} = 12x^2 - 12y^2 - 12x^2 + 12y^2 = 0.$

(h) f deki gibi yapılır.

10. (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

$f_x = 2x,\quad f_{xx} = 2,\quad f_y = 2y,\quad f_{yy} = 2,\quad f_z = -4z,\quad f_{zz} = -4$

$$\frac{\partial^2 f_{xx} + f + f_{yy} + f_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 + 2 - 4 = 0$$

(b) $f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$f_x = -x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}},\quad f_{xx} = -\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f_y = -y\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}},\quad f_{yy} = -\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f_z = -z\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}},\quad f_{zz} = -\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} + 3z^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = -3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} + 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} + 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

(c) $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos 5z$

$f_x = 3e^{3x+4y}\cos 5z,\qquad f_{xx} = 9e^{3x+4y}\cos 5z$

$f_y = 4e^{3x+4y}\cos 5z,\qquad f_{yy} = 16e^{3x+4y}\cos 5z$

$f_z = -5e^{3x+4y}\sin 5z,\qquad f_{zz} = -25e^{3x+4y}\cos 5z$

$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = (9 + 16 + 25)\cos 3x\cos 4y\sinh 5z = 0$ olur.

(d) $f(x,y,z) = \cos 3x \cos 4y \sinh 5z$

$f_x = -3\sin 3x\cos 4y\sinh 5z,\quad f_{xx} = -9\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

$f_y = -4\cos 3x\sin 4y\sinh 5z,\quad f_{yy} = -16\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

$f_z = 5\cos 3x\cos 4y\cosh 5z,\quad f_{zz} = 25\cos 3x\cos 4y\sinh 5z$

$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = (-9 - 16 + 25)\cos 3x\cos 4y\sinh 5z = 0.$

11. (a) $u(x,t) = \sin bcx \sin bt$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = bc\cos bcx \sin bt, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -b^2c^2 \sin bcx \sin bt$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b\sin bcx \cos bt, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -b^2 \sin bcx \sin bt$$

olduğundan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dir.

(b) $u(x,t) = \sin(cx + t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c\cos(cx+t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -c^2 \sin(cx+t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos(cx+t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\sin(cx+t)$$

olur. Buna göre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dir.

(c) b şıkkındaki çözüme benzer olarak yapılır.

(d) $u(x,t) = \sin(cx + t)\cos(2cx + 2t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = c\cos(cx + t)\cos(2cx + 2t) - 2c(\sin(cx + t)\sin(2cx + 2t) = c.\cos(3cx + 3t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -3c^2 \cos(3cx + 3t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos(cx + t)\cos(2cx + 2t) - \sin(cx + t)\sin(2cx + 2t) = \cos(3cx + 3t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -3\sin(3ax + 3t).$$

bulunur. Buradan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ bulunur.

(e) $u(x,t) = \ln(2cx + 2t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2c}{2cx+2t}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{4c^2}{(2cx+2t)^2} = \frac{c^2}{(cx+t)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{2cx+2t} = \frac{1}{cx+t}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{-1}{(cx+t)^2}$$

olduğundan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dir.

12. (a) $u(x,t) = e^{ax+bt}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = be^{ax+bt}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax+bt}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 e^{ax+bt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow be^{ax+bt} = c.a^2 e^{ax+bt} \Rightarrow c = \frac{b}{a^2}$$

(b) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{at}}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{at}} + \frac{x^2}{at^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{at}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{at^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{at}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2}{at^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{at}} + \frac{4x^2}{a^2 t^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{at}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{4}{a}\left(-\frac{1}{2t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{at}} + \frac{x^2}{at^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{at}}\right) = \frac{4}{a}\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow c = \frac{4}{a}$$

(c) $u(x,t) = e^{-n^2 kt} \sin nx$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ne^{-n^2 kt} \cos nx, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -n^2 e^{-n^2 kt} \sin nx$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dir. Bu durumda $e = k$ dır.

13. $u(x,y,t) = e^{-(m^2+n^2)ct} \sin mx \cos ny$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = me^{-(m^2+n^2)ct} \cos mx \cos ny$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -m^2 e^{-(m^2+n^2)ct} \sin mx \cos ny$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -ne^{-(m^2+n^2)ct} \sin mx \sin ny$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -n^2 e^{-(m^2+n^2)ct} \sin mx \cos ny$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c(m^2+n^2)e^{-(m^2+n^2)ct} \sin mx \cos ny$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(m^2+n^2)e^{-(m^2+n^2)ct} \sin mx \cos ny = \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ bulunur.

14. $z_x = 2ax + 2by,\ z_{xx} = 2a,\ z_{xy} = 2b,\ z_y = 2bx + 2c,\ z_{yy} = 2_c,\ z_{yx} = 2b$

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - 4b^2 = 4(ac - b^2)$$

15. $u_x = \dfrac{3x^2 - 3y^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \quad u_y = \dfrac{3y^2 - 3x}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \quad u_z = \dfrac{3z^2 - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$

$$u_x + u_y + u_z = \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3yz - 3xz - 3xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

$$= \frac{3\left(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy\right)}{(x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy\right)} = \frac{3}{x + y + z}$$

16. $\dfrac{\partial u}{dx} = \dfrac{\dfrac{1}{cos^2 x}}{tan x + tan y + tan z} \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{1}{cos^2 y}}{tan x + tan y + tan z}$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\dfrac{1}{cos^2 z}}{tan x + tan y + tan z}$$

$$sin 2x \frac{\partial u}{\partial x} + sin 2y \frac{\partial u}{\partial y} + sin 2z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= \frac{2 sin x cos x \dfrac{1}{cos^2 x}}{tan x + tan y + tan z} + \frac{2 sin y cos y \dfrac{1}{cos^2 y}}{tan x + tan y + tan z} + \frac{2 sin z cos z \dfrac{1}{cos^2 z}}{tan x + tan y + tan z}$$

$$= 2\frac{tan x}{tan x + tan y + tan c} + 2\frac{tan y}{tan x + tan y + tan z} + 2\frac{tan z}{tan x + tan y + tan z}$$

$$= 2\frac{tan x + tan y + tan z}{tan x + tan y + tan z} = 2$$

17. $f_x(0,y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h.y \sin \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{h+y}{h-y}\right) - 0}{h}$

$$= y \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -y$$

$$f_x(0,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{-k - 0}{k} = -1$$

$$f_x(x,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{x.k \sin \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x+k}{x-k}\right) - 0}{k}$$

$$= x.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = x$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

ZİNCİR KURALI

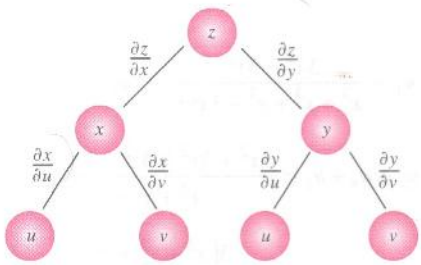
TEOREM **(Zincir Kuralı)**

$z = f(x, y)$ şeklinde tanımlanan $f: B \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. f, f_x, f_y fonksiyonları B üzerinde sürekli ve $x = g(u,v)$, $y = h(u, v)$ fonksiyonlarının u ve v değişkenlerine göre kısmi türevlere varsa $z = f(g(u, v), h(u, v))$ fonksiyonunun da u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri vardır ve

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

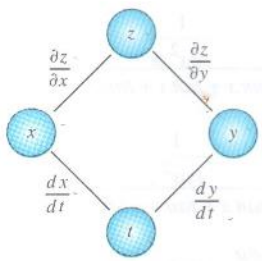
dir.



1. $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ ise

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

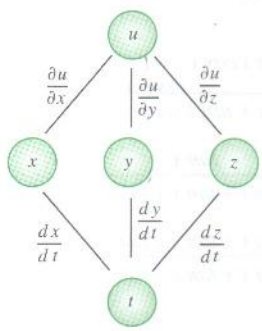
olur.



2. $u = f(x, y, z)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = k(t)$ ise

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

dir.

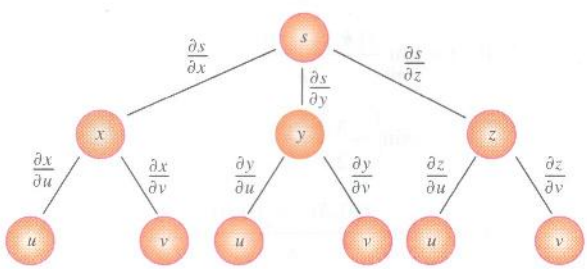


3. $s = f(x, y, z)$, $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$, $z = k(u, v)$ ise

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

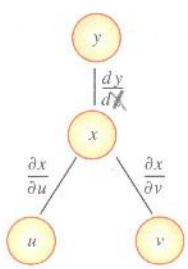
dir.



4. $y = f(x)$, $x = g(u, v)$ ise

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{dy}{dx}\frac{\partial x}{\partial u} \quad ve \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{dy}{dx}\frac{\partial x}{\partial v}$$

dir.



www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

KAPALI OLARAK TANIMLANAN FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

$z = f(x, y)$ fonksiyonu $F(x,y,z) = 0$ bağıntısıyla tanımlanmış ise

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad ve \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

dir.

TANIM

f, (x_0, y_0) noktasında türevli bir fonksiyon olsun.

$$L(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, x_0)(y - y_0)$$

fonksiyonuna f nin **lineerleştirilmişi** denir.

$$f(x, y) \equiv L(x, y)$$

yaklaşımına f *nin* (x_0, y_0) noktasındaki **standart lineer yaklaşımı** denir.

$f(x, y)$ yerine $L(x, y)$ alındığında yapılan hata

$$E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$$

olur. f fonksiyonu

$$B = \{ (x, y) : |x - x_0| < h, \ |y - y_0| < k$$

dikdörtgeni tarafından kapsanan her bir açık küme üzerinde birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. $|f_{xx}|$, $|f_{xx}|$, $|f_{xy}|$ fonksiyonlarının B üzerinde aldığı en büyük değer M ise

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{2} M\left(|x - x_0| + |y - y_0|\right)^2$$

olur.

TANIM

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun **tam diferensiyeli**

$$dz = f_x\, dx + f_y\, dy$$

dir. Bu fonksiyonun **ikinci mertebeden tam diferensiyeli**

$$d^2z = z_{xx}(dx)^2 + 2\, z_{xy}\, dx\, dy + z_{yy}(dy)^2$$

ifadesidir. Genel olarak

$$d^n z = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)^{(n)}$$

dir. Burada binom katsayıları aynen, türevlerin kuvveti yerine yüksek mertebeden kısmi türevler alınmalıdır.

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

PROBLEMLER

- Zincir Kuralı
- Kapalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonların Kısmi Türevleri

1. Aşağıdaki fonksiyonların birinci ve ikinci mertebeden tam diferensiyellerini hesaplayınız.

   (a) $f(x, y)\ x^3 + 5xy^2 + 3xy + 4x - 3y + 5$

   (b) $f(x, y, z) = 3x^2 yz^3 - 3xy + 2yz^2 + xyz$

   (c) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

2. Taban yarıçapı 10 cm, yüksekliği 30 cm olan bir koninin yüksekliği 3 mm artırılır, taban yarıçapı 1 mm azaltılırsa hacmi kaç cm^3 değişir?

3. Taban yarıçapı $r = 1$ cm, yüksekliği $h = 5$ cm olan bir dairesel silindirin, yarıçapı 0,03 cm artırılır, yüksekliği 0,1 cm azaltılırsa silindirin hacminde meydana gelen değişmenin, mutlak (dV), göreli $\left(\frac{dV}{V}\right)$ ve yüzdelik $\left(\frac{dV}{V}.100\right)$ değerini hesaplayınız.

4. Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan bir dairesel silindir veriliyor. r nin ölçülmesinde yapılan hata % 2 den, h nin ölçülmesinde yapılan hata % 0,5 den büyük olmadığına göre $V = \pi r^2 h$ hacminin ölçülmesinde yapılan hata en fazla yüzde kaçtır?

5. Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

   (a) $(2{,}001)^{3{,}014}$ (b) $\sqrt{(2{,}999)^2 + (4{,}001)^2}$

6. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki $L(x, y)$ lineerleştirilmişini hesaplayınız.

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, $P(1, 1)$ ve $Q(0, 0)$

   (b) $f(x, y) = x^3 y^4$, $P(1, 1)$ ve $Q(0,0)$

   (c) $f(x, y) = e^y \cos y$, $P(0, 0)$ ve $Q(0, \frac{\pi}{2})$

   (d) $f(x, y) = e^{2y-x}$, $P(0, 0)$ ve $Q(1, 2)$

   (e) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, $P(1, 1)$ ve $Q(1, 0)$

   (f) $f(x, y) = \ln(xy)$, $P(1, 1)$ ve $Q(1, e)$

7. Aşağıda verilen fonksiyonların belirtilen noktalardaki lineerleştirilmişini yazınız. Verilen bölgede

   $f(x, y) \cong L(x, y)$

   yaklaşımından doğan hatanın $|E|$ üst sınırını hesaplayınız.

   (a) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$, $P(1, 2)$

   $B = \{(x, y) : |x - 1| \le \frac{1}{10}, |y - 2| \le \frac{1}{10}\}$

   (b) $f(x, y) = 1 + y + x \cos y$, $P(0, 0)$

   $B = \{(x, y) : |x| \le 0{,}2 \text{ ve } |y| \le 0{,}2\}$

   (c) $f(x, y) = e^x \cos y$, $P(0, 0)$

   $B = \{(x, y) : |x| \le \frac{1}{10}, |y| \le \frac{1}{10}\}$

   ($e^x \le 1{,}11$ ve $|\cos y| \le 1$ alınız.)

8. Aşağıda verilen fonksiyonların, karşılarında yazılı noktalarda lineerleştiriniz.

   (a) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $P(1, 1, 1)$

   (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(0, 1, 0)$

   (c) $f(x, y, z) = \arctan(xyz)$, $P(1, 1, 1)$

9. Aşağıda verilen fonksiyonlar için $\frac{dz}{dt}$ türevlerini

   (1) zincir kuralı ile

   (2) z yi t cinsinden yazdıktan sonra türev alarak hesaplayınız. Bulduğunuz türevin verilen noktadaki değerini bulunuz.

   (a) $z = x^2 + y^2, x = \cos t + \sin t, y = \cos t - \sin t$; $t = 0$

   (b) $z = \ln(x^2 + y^2), x = \cos t, y = \sin t$; $t = 1$

   (c) $z = \arctan \frac{y}{x}, x = \cos t, y = \sin t$; $t = \frac{\pi}{2}$

   (d) $z = (x + 3y)^3, x = 1 - t, y = 1 + t$; $t = 1$

   (e) $z = \frac{y}{x}, x = e^t, y = \ln t$; $t = 1$

   (f) $z = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}, x = 3t^2, y = \sqrt{t^2 + 1}$; $t = 0$

10. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonlar için $\frac{du}{dt}$ türevini hesaplayınız.

(a) $u = \sin xyz,\ x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(b) $u = x^2 + y^2 + z^2,$

$x = e^{2t}\cos 2t,\ y = e^{2t}\sin 2t,\ z = e^{4t}$

(c) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2),\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$

(d) $u = \ln(x + y + z),\ x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t,\ z = t^2$

11. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonlar için $\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız.

(a) $z = xy,\ x = e^u \cos v,\ y = e^u \sin v$

(b) $z = \arctan\frac{x}{y},\ x = u\cos v,\ y = u\sin v$

(c) $z = x^2 - y^2,\ x = u + v,\ y = u - v$

(d) $z = x^2 - y^2,\ x = u^2 - v^2,\ y = uv$

(e) $z = x^2 + \frac{x}{y},\ x = u - 2v + 1,\ y = 2u + v - 2$

(f) $z = \sin xy + x\sin y,\ x = u^2 + v^2,\ y = uv$

12. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan fonksiyonlar için $\frac{\partial u}{\partial s}$ ve $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevlerini hesaplayınız.

(a) $u = xy\sin z,\ x = 2s + t,\ y = s - t,\ z = st$

(b) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$

$x = 3e^s \sin t,\ v = 3e^s \cos t,\ z = 4e^s$

(c) $u = xy + yz + zx,$

$x = s^2 - t^2,\ y = s^2 + t^2,\ z = s^2 t^2$

(d) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2),$

$x = s\cos t,\ y = s\sin t,\ z = t$

13. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonlar için u_r, u_θ, u_φ türevlerini hesaplayınız.

(a) $u + xy + yz + xz,$

$x = e^{r\theta}\cos\varphi,\ y = e^{r\theta}\sin\varphi,\ z = e^{r\theta}$

(b) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ x = r\sin\theta\cos\varphi,$

$y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$

(c) $u = xy + yz + xz,$

$x = r + \theta,\ y = \theta - \varphi,\ z = \theta + \varphi$

(d) $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$

$x = r e^\theta \sin\varphi,\ y = r e^\theta \cos\varphi,\ z = r e^\theta$

14. $x^2y'' + xy' + y = 0$ denklemini, $x = e^t$ eşitliği ile verilen yeni t değişkenine göre yazınız.

15. $\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ denklemini $u = x,\ v = x^2 + y^2$ eşitliğiyle verilen yeni u, v değişkenlerine göre yazınız.

16. $t = f(u, v, w)$ türevlenebilir bir fonksiyon ve

$u = x - y,\ v = y - z,\ w = z - x$ olsun.

$$\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$

olacağını gösteriniz.

17. f ve g, ikinci mertebeden türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere

$$z = x f(\frac{y}{x}) + g(\frac{y}{x})$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

17. f türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$z = x f(\frac{y}{x}) - x^2 - y^2$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

19. f, ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere $z = f(\cos(x - y))$ fonksiyonu için

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

20. Zincir kuralından yararlanarak, aşağıdaki fonksiyonların karşısında yazılı denklemi sağladığını gösteriniz. Burada f ve g türevlenebilen herhangi iki fonksiyondur.

(a) $z = f(x + g(y))$, $z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$

(b) $z = xf(x + y) + yg(x + y)$, $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$

(c) $z = f(x + at) + g(x - at)$, $z_{tt} = a^2 z_{xx}$

(d) $z = f(xy) + \sqrt{xy} + g\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 z_{xx} = y^2 z_{yy}$

21. Aşağıdaki bağıntılarla kapalı olarak tanımlanan $z = f(x, y)$ fonksiyonunun karşılarında yazılı noktalardaki kısmi türevlerini hesaplayınız.

(a) $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $A(1, 1, 1)$

(b) $z^3 + xyz + xy^2 - 1 = 0$, $B(1, 1, 0)$

(c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $C(2, 3, 6)$

(ç) $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z) = 0$, $Ç(\pi, \pi, \pi)$

(d) $x^3 + y^3 + z^3 = 5xyz$, $D(2,1,1)$

(e) $z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 13$, $E(2, 2,1)$

22. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ eşitliği ile verilen $z = z(x, y)$ fonksiyonu için $z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{yy}$ türevlerini bulunuz.

23. $f(x, y, z) = 0$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

bağıntısının sağlandığını gösteriniz.

24. f türevlenebilen herhangi bir fonksiyonu göstermek üzere

$$x - az = f(y - bz)$$

denklemiyle verilen $z = z(x, y)$ fonksiyonu için

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

denkleminin sağlandığını gösteriniz.

25. f türevlenebilen bir fonksiyon, $v = f(u)$, $u = x + y$ olsun.

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ olduğunu gösteriniz.

26. f, ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon, $v = f(u)$, $u = x - y$ olsun. $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ ve

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

olacağını gösteriniz.

27. f, ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip bir fonksiyon, $s = f(x, y)$, $x = u + v$, $y = u - v$ olsun.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v}$$

olacağını gösteriniz.

28. α nın hangi değerleri için

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$$

fonksiyonu üç boyutlu Laplace denklemini sağlar?

ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x, y) = x^3 + 5xy^2 + 3xy + 4x - 3y + 5$

$df = f_x\,dx + f_y dy = (3x^2 + 5y^2 + 3y + 4)\,dx + (10xy + 3x - 3)dy$

$d^2f = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}\,dxdy + f_{yy}(dy)^2$

$= 6x(dx)^2 + 2.(10y + 3)\,dxdy + 10x(dy)^2$

(b) $f(x,y,z) = 3x^2yz^3 - 3xy + 2yz^2 + xyz$

$df = (6x - 3y + yz)dx + (3x^2z^3 - 3x + 2z^2 + xz)dy + (9x^2yz^2 + 4yz + xy)d^2$

$d^2f = f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}\,dxdy + 2f_{xz}dxdz + 2f_{yz}dydz + f_{yy}(dy)^2 + f_{zz}(dz)^2$

$= 6(dx)^2 + 2.(-3)dxdy + 2.ydxdz + 2(9x^2z^2+4z+x)\,dydz + 0(dy)^2 + (18x^2y + 4y)(dz)^2$

$= 6(dx)^2 - 6dxdy + 2ydxdz + 2(9x^2z^2 + 4z + x)\,dydz + (18x^2yz + 4y)(dz)^2$

(c) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy$

$f_x = 3x^2 - 3yz, \qquad f_y = 3y^2 - 3xz, \qquad f_z = 3z^2 - 3xy$

$f_{xx} = 6x, \qquad f_{yy} = 6y \qquad f_{zz} = 6z$

$f_{xy} = -3z \qquad f_{xz} = -3y \qquad f_{yz} = -3x$

$df = (3x^2 - 3yz)dx + (3y^2 - 3xz)dy + (3z^2 - 3xy)dz$

$d^2f = 6x(dx)^2 + 2(-3z)dxdy + 2(-3y)dxdz + 2(-3x)dydz + 6y(dy)^2 + 6z(dz)^2$

$= 6[x(dx)^2 - zdxdy - ydzdz - xdydz + y(dy^2) + z(dz)^2]$

2. $v = \pi r^2 h, \quad dh = 0{,}3$ cm, $\quad dr = -0{,}1$ cm, $\quad dv = v_r dr + v_h dh,$

$v_r = 2\pi rh, \quad v_h = \pi r^2, \quad r = 10$ cm, $\quad h = 30$ cm

$dv = (2\pi rh)dr + (\pi r^2)dh = (2\pi.10.30)\,(-0{,}1) + (\pi.100).(0{,}3) = -30\pi$

olur. Hacim 30π cm^3 azalır. (Bu değer gerçek azalma olmayıp ona çok yakın bir değerdir.

3. $v = \pi r^2 h, \quad dv = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dv}{\pi r^2 h} = \frac{2\pi rhdr}{\pi r^2 h} + \frac{\pi r^2 dh}{\pi r^2 h} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{r}dr + \frac{dh}{h}$$ olur.

$r = 1$ cm, $\quad h = 5$ cm, $\quad dr = 0{,}03$ cm, $\quad dh = -0{,}1$ cm alınırsa

$$dv = 2\pi.1.5.0{,}03 + \pi.1^2.(-0{,}1) = 0{,}2\pi \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{1}.0{,}03 - \frac{0{,}1}{5} = 0{,}06 - 0{,}02 = 0{,}04.$$

$\frac{dv}{v}.100 = 4$ bulunur.

4. $\frac{dv}{v}.100 = 100\left(\frac{2}{r}dr + \frac{1}{h}dh\right) = 100\left(\frac{2}{r}.0,02r + \frac{1}{h}.0,005h\right) = 4 + 0,5 = 4,5$

Yapılan hata %4,5 tan büyük olamaz.

5. (a) $z = x^y \Rightarrow dz = yx^{y-1}dx + x^y ln x\, dy$ olur. Bu ifadede

$x = 2,\ y = 3,\ dx = 0,001$ ve $dy = 0,014$ alınırsa

$dz = 3.2^2 . (0,001) + 2^3 ln2 . (0,014) = 0,012 + 0,112 . ln2 \cong 0,012 + (0,112).(0,693) = 0,089$

bulunur.

(b) $x = 3,\quad \Delta x = -0,001,\quad y = 4,\quad \Delta y = 0,001,\quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy \Rightarrow dz = \frac{3}{\sqrt{25}(-0,001)} + \frac{4}{\sqrt{25}}(0,001)$$

$$= \frac{1}{5} - (-0,003 + 0,004) = \frac{1}{5}.0,001 = 0,0002$$

olur. Buna göre

$$\sqrt{(2,999)^2 + (4,001)^2} \cong \sqrt{3^2 + 4^2} + 0,0002 = 5,0002$$

bulunur.

6. (a) $L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1,\ P(x_0, y_0) = P(1, 1),\quad f_x = 2x,\quad f_y = 2y.$

$L(x, y) = 3 + 2.1(x - 1) + 2.1(y - 1) = 2x + 2y - 1$

$Q(0, 0)$ noktası için $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ve $f(0,0) = 1$ olacağından

$L(x, y) = 1 + 0(x - 0) + 0(y - 0) = 1$

bulunur.

(f) $f(x, y) = ln(xy),\qquad P(x_0, y_0) = P(1, 1)$

$f_x(x, y) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \Rightarrow f_x(1,1) = 1,\qquad f_y(x,y) = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y} \Rightarrow f_y(1,1) = 1,\quad f(1,1) = ln1 = 0$ olacağından,

$L(x, y) = 1(x - 1) + 1.(y - 1) = x + y - 2$

bulunur. $Q(x_0, y_0) = Q(1, e)$ için

$$L(x, y) = 1 + 1.(x - 1) + \frac{1}{e}(y - e) = x + \frac{1}{e}y - 1$$

olur.

7. (a) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$, $P(1,2)$, $B = \{(x,y); (x-1) < \frac{1}{10}, |y-2| < \frac{1}{10}\}$

$f(1,2) = 1 - 6 + 4 = -1$, $f_x = 2x - 3y$, $f_y = -3x + 2y$.

$L(x,y) = -1 + (-4)(x-1) + 1(y-2) = -4x + y + 1$

olur. B bölgesi için yapılabilecek maksimum hata

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{2} M(|x-1| + |y-2|)^2 \le \frac{1}{2} M\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{2M}{100}$$

olur. Şimdi M sayısını bulalım.

$f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -3$

olacağından $M = maks\{|2|, |2|, |-3|\} = 3$ tür. Dolayısıyla $|E(x,y)| \le \frac{6}{100} = 0,06$ olur.

(b) $f(x,y) = 1 + y + x\cos y$, $P(0,0)$

$f_x(x,y) = \cos y$, $f_{xx} = 0$, $f_y(x,y) = 1 - x\sin y$, $f_{yy} = -x\cos y$, $f_{xy} = -\sin y$

$f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 1$ olduğundan

$L(x,y) = 1 + 1.x + 1.y = x + y + 1$ olur.

$|f_{xx}| = 0$, $|f_{yy}| = |x.\cos y| \le |x| \le 0,2$ ve $|f_{xy}| = 1 - \sin y| \le \sin(0,2)$ olacağından

$M = 0,2$ dir. Buna göre yapılabilecek maksimum hata

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{2}.0,2(0,2+0,2)^2 = 0,016$$

dır.

8. (a) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $P(1,1,1)$

$L(x,y,z) = f(1,1,1) + f_x(1,1,1)(x-1) + f_y(1,1,1)(y-1) + f_z(1,1,1)(z-1)$

$f_x = y + z$, $f_y = x + z$, $f_z = x + y$

$L(x,y,z) = 3 + 2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 2x + 2y + 2z - 3$

(c) $f_x = \frac{yz}{1+(xyz)^2}$, $f_y = \frac{xz}{1+(xyz)^2}$, $f_z = \frac{xy}{1+(xyz)^2}$

$f(1,1,1) = arctan\,1 = \frac{\pi}{4}$, $f_x(1,1,1) = f_y(1,1,1) = f_z(1,1,1) = \frac{1}{2}$

$$L(x,y,z) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}(z-1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$$

9. (a) (1) $z = x^2 + y^2, \quad x = cost + sint, \quad y = cost - sint; \quad t = 0.$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = 2x.(-sint + cost) + 2y\,(-sint - cost)$$

$$= 2(cost + sint)(cost - sint) + 2(cost - sint)(-sint - cost)$$

$$= 2(\cos^2 + sint)(cost - sint) + 2(cost - sint)(-sint - cost)$$

$$= 2(\cos^2 t - \sin^2 t) + \sin^2 t + \sin^2 t - \cos^2 t) = 2.0 = 0$$

(2) $z = x^2 + y^2 = (cost + sint)^2 + (cost - sint)^2 = cost^2 t + \sin^2 t + 2costsint + \cos^2 t + \sin^2 t - 2costsint$

$$= 2(\cos^2 t + \sin^2 t) = 2.1 = 2 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 0$$

olur.

(c) $z = arctan\,\frac{y}{x}, \quad x = cost, \quad y = sint, \quad t = \frac{\pi}{2}$

(1) $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.(-\sin t) + \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\cos t = \frac{y}{x^2+y^2}\sin t + \frac{x}{x^2+y^2}\cos t$$

$$= \frac{\sin t.\sin t}{\cos^2 t \sin^2 t} + \frac{\cos t.\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{1}{1} = 1.$$

(2) $z = arctan\,\frac{y}{x} = arctan\left(\frac{sint}{cost}\right) = arctan(tant) = t$ olacağından $\frac{dz}{dt} = 1$ dir.

(e) $z = \frac{y}{x}, \quad x = et, \quad y = lnt, \quad t = 1$

(1) $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x^2}.e^t + \frac{1}{x}.\frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{e^{2t}} + \frac{1}{e^t.t}$$

olur. $t = 1$ için

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{0}{e^2} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

bulunur.

10. (a) $u = sinxyz, \; x = t, y = t^2, \; z = t^3$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt} = yz\cos xyz + (xz\cos xyz).2t + (xy\cos txyz).3t^2$$

$$= \cos xyz\left(yz + xz.2t + xy.3t^2\right) = \cos t^6\left(t^5 + 2t^5 + 3t^5\right) = 6t^5\cos t^6$$

(c) $u = ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = cost, \; y = sint, \; z = t$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}.(-\sin t) + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}.\cos t + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{-2\sin t\cos t}{1+t^2} + \frac{2\sin t\cos t}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

11. (a) $z = x, \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = y.e^u \cos v + xe^u \sin v = e^u \sin v.e^u \cos v + e^u \cos v.e^u \sin v$$

$$= 2e^{2u} \sin v \cos v = e^{2u} \sin 2v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = y\left(-e^u \sin v\right) + xe^u \cos v = \left(e^u snv\right)\left(-e^A \sin v\right) + e^u \cos v.e^u \cos v$$

$$= e^{2u}\left(\cos^2 v - \sin^2 v\right) = e^{2u} \cos 2v$$

(b) $z = \arctan \dfrac{x}{y}, \quad x = u\cos v, \quad y = u\sin v$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\dfrac{1}{y}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}.\cos v + \frac{-\dfrac{x}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\sin v$$

$$= \frac{y}{y^2 + .x^2}\cos v - \frac{x}{y^2 + .x^2}\sin v = \frac{u\sin v\cos v}{u^2} - \frac{u\cos v\sin v}{u^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\dfrac{1}{y}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} - u\sin v + \frac{-\dfrac{x}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{4}\right)^2}u\cos v = \frac{-u^2\sin^2 v}{u^2} - \frac{u^2\cos^2 v}{u^2} = -1$$

(d) $z = x^2 - y^2, \; x = u^2 - v^2, \quad y = uv$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial 2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2.x.2u + (-2y).v = 2\left(u^2 - v^2\right).2u - 2uv.v = 4u^3 - 6uv^2$$

(f) $z = sinxy + xsiny, \; x = u^2 + v^2, \; y = uv$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (y\cos xy + \sin y)2u + (x\sin xy + x\cos y).v$$

$$= 2u^2 v\cos uv\left(u^2 + v^2\right) + 2u\sin uv + v\left(u^2 + v^2\right) + v\left(u^2 - v^2\right)\cos uv$$

12. (a) $u = xy\,sinz, \quad x = 2s + t, \quad y = s - t, \quad z = st$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = y\sin z.2 + x\sin z.1 + xy\cos z.t$$

$$= 2(s-t)\sin st + (2s+t)\sin st + (2s+t)(s-t)t\cos st$$

u_t benzer biçimde hesaplanır.

(b) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad x = 3e^s sint, \quad y = 3e^s cost, \quad z = 4e^s$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}3e^s \sin t + y\left(x^2 + y^2 + z^2\right)3e^s \cos t + z\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}4e^s$$

$$= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}\left[9e^{2s}\sin^2 t + 9e^{2s}\cos^2 t + 16e^{2s}\right] = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}25e^{2s}$$

olur. $x^2 + y^2 + z^2 = 9e^{2s}\sin^2 t + 9e^{2s}\cos^2 t + 16e^{2s} = 25e^{2s}$ olduğundan

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(25e^{2s}\right)^{-1/2}.25e^{2s} = \frac{25e^{2s}}{5e^{s}} = 5e^{s}$$

$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = 5^{2s}$ olduğundan $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ dır.

(c) $u = xy + yz + zx,\ x = s^2 - t^2,\ y = s^2 + t^2,\ z = s^2t^2$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = (y+z)2s + (x+z)2s + (x+y).2st^2$$

$$= 2s\left[y + z + x + z + (x+y)t^2\right] = 2s\left(s^2 + t^2 + s^2t^2 + 25^4\, t^2\right) = 4s^3\left(1 + t^2 + s^2t^2\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = (y+z)(-2t) + (x+z)2t + (x+y)2s^2t$$

$$= 2t\left[-y - z + x + z + (x+y)s^2\right] = 2t\left[-2t^2 + 2s^4\right] = 4t\left(s^4 - t^2\right)$$

13. (a) $u = xy + yz + xz,\ x = e^{r\theta}\cos\varphi,\ y = e^{r\theta}\sin\varphi,\ z = e^{r\theta}$

$u_r = u_x x_r + u_y y_r + u_z z_r = (y+z)\theta e^{r\theta}\cos\varphi + (x+z)\theta e^{r\theta}\sin\varphi + (y+x)\theta e^{r\theta}$

$= \theta e^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + \theta e^{2r\theta}\cos\varphi + \theta e^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + \theta e^{2r\theta}\sin\varphi + \theta e^{2r\theta}\sin\varphi + e^{2r}\cos\varphi$

$= 2\theta e^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + 2\theta e^{2r\theta}\sin\varphi + 2\theta e^{2r\theta}\cos\varphi = 2\theta e^{2r\theta}(\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$

$u_\theta = u_x . x_\theta + u_y . y_\theta + u_z . z_\theta = (y+z)re^{r\theta}\cos\varphi + (x+z)re^{r\theta}\sin\varphi + (y+x)re^{r\theta}$

$= 2re^{2r\theta}\sin\varphi\cos\varphi + 2re^{2\theta}\sin\varphi + 2re^{2r\theta}\cos\varphi = 2re^{2r\theta}(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$

$u_\varphi = u_x x_\varphi + u_y y_\varphi + u_z z_\varphi = (y+z)e^{r\theta}(-\sin\varphi) + (x+z)e^{r\theta}\cos\varphi = e^{2r\theta}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + e^{2r\theta}\cos\varphi - \sin\varphi)$

(b) $u = x^2 + y^2 + z^2,\quad x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta$

$u_r = u_x . x_r + u_y . y_r + u_z . z_r = 2x\sin\theta\cos\varphi + 2y\sin\theta\sin\varphi + 2z\cos\theta$

$= 2r\sin^2\theta\cos^2\varphi + 2r\sin^2\theta\sin^2\varphi + 2r\cos^2\theta = 2r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2r$

$u_\theta = u_x . x_\theta + u_y y_\theta + u_z z_\theta = 2xr\cos\theta\cos\varphi + 2yr\cos\theta\sin\varphi - 2zr\sin\theta$

$= 2r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi\ 2r^2\sin\theta\sin\theta\sin^2\varphi - 2r^2\cos\theta\sin\theta = 2r^2(cs\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) = 0$

$u_\varphi = u_x x_\varphi + u_y y_\varphi + u_z z_\varphi = -2xr\sin\theta\sin\varphi + 2yr\sin\theta\cos\varphi + 2z.0$

$= -2r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + 2r^2\sin^2\varphi\sin\varphi\sin\varphi\cos\varphi = 0$

(c) $u = xy + yz + xz,\quad x = r + \theta,\ y = \theta - \varphi,\ z = \theta + \varphi$

$u_r = u_x x_r + u_y y_r + u_z z_r = (y+z) + 0 + 0 = 2\theta$

$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta + u_z z_\theta = (y+2) + (x+z) + (y+x) = 2(x+y+z) = 2(r+2\theta)$

$u_\varphi = u_x . x_\varphi + u_z . z_\varphi = (y+z)0 + (x+z(-1) + (x+y).1 = y - z = -2\varphi$

(d) $u=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $x=re^{\theta}\sin\varphi$, $y=re^{\theta}\cos\varphi$, $z=re^{\theta}$

$$u_r=u_x.x_r+u_y.u_r+u_z.z_r=x.e^{\theta}\sin\varphi+y.e^{\theta}\cos\varphi+ze^{\vartheta}=re^{2\varphi}\sin^2\varphi+re^{2\theta}\cos^2\varphi+re2^{\varphi}=2re^{2\theta}$$

$$u_{\theta}=u_x.u_0+u_y.y_0+u_zz_{\varphi}=x.re^{\theta}\sin\varphi+yre^{\theta}\cos\varphi+zre^{\theta}=r^2e^{2\theta}\sin^2\varphi+r^2e^{2\theta}\cos^2\varphi+r^2e^{2\theta}=2r^2e^{2\theta}$$

$$u_{\varphi}=u_x.x_{\varphi}+u_y.y_{\varphi}+u_z.z\varphi=x.re^{\theta}\cos\varphi-yre^{\varphi}\sin\varphi+z.0=r^2e^{2\theta}\cos\varphi\sin\varphi-r^2e^{2\theta}\sin\varphi\cos\varphi=0$$

14. $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=\left(-e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)e^{-t}=-e^{-2t}\frac{dy}{dt}+e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

olur. Türevlerin bu değerleri verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$x^2y''+xy'+y=0\ \Rightarrow\ e^{2t}.e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+e^{+t}e^{-t}\frac{dy}{dt}+y=0\ \Rightarrow\ \frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

bulunur.

15. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial u}+2u\frac{\partial z}{\partial v}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial v}=2\sqrt{v-u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+2u\frac{\partial z}{\partial v}-2u\sqrt{v-u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v}=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial u}+2u\left(1-\sqrt{v-u^2}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

denklemi elde edilir.

16. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial w}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u},$$

$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{dz}=\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}$ olur. Buradan

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial v}=0$$

bulunur.

17. $z_x=f(\frac{x}{y})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}g'(\frac{y}{x})$

$$z_{xx}=-\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^3}f''(\frac{y}{x})+\frac{2y}{x^3}f'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}f''(\frac{y}{x})$$

$$z_{xy}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{1}{x^2}g'(\frac{x}{y})-\frac{y}{x^3}g''(\frac{y}{x})=-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{1}{x^2}g'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^3}g''(\frac{y}{x})$$

$$z_y=f'(\frac{y}{x})+\frac{1}{x}g'(\frac{y}{x}),\quad z_{yy}=\frac{1}{x}f''(\frac{y}{x})+\frac{1}{x^2}g''(\frac{y}{x})$$

$$x^2z_{xx}+2.xyz_{xy}+y^2z_{yy}=-yf''(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x}f''(\frac{y}{x})+\frac{2y}{x}g'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^2}g''(\frac{y}{x})-\frac{2y^2}{x}f''(\frac{y}{x})-2\frac{y}{x}g'(\frac{y}{x})$$

$$-\frac{2y^2}{x^2}g''(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x}f''(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^2}g''(\frac{y}{x})=0$$

18. $z_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) - 2x, \quad 2y = f'\left(\frac{y}{x} - 2y\right)$

$$xz_x + yz_y = xf\left(\frac{y}{x}\right) - 2x^2 + yf'\left(\frac{y}{x}\right) - 2y^2 = xf\left(\frac{y}{x^2}\right) - x^2 - y^2 - x^2 - y^2 = z - x^2 - y^2$$

19. $z_x = f'(\cos(x-y)).(-\sin(x-y)), \quad z_{xx} = f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y) f'(\cos(x-y))$

$$z_{xy} = -f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) + \cos(x-y) f'(\cos(x-y))$$

$$z_y = f'(\cos(x-y))\sin(x-y), \quad z_{yy} = f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y) f'(\cos(x-y))$$

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = f'(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y) f'(\cos(x-u))$$

$$+ 2\cos(-y) f'(\cos(x-y)) - 2f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y)$$

$$+ f''(\cos(x-y))\sin^2(x-y) - \cos(x-y) f'(\cos(x-y)) = 0$$

olacağından

$$z_{xx} + 2z_{xy} + 2z_{yy} = 0$$

bulunur.

20. (a) $z = f(x + g(u)),' \quad z_x z_{xy} = z_y z_{xx}$

$$z_x = f'(x+g(u)), \quad z_{xy} = f''(x+g(u))g'(u), \quad z_{xx} = f''(x+g(u)), \quad z_y = f'(x+g(u)).g'(u)$$

$$z_x z_{xy} = f'(x+g(u)).f''(x+g(u)).g'(u) = z_y z_{xx}.$$

(b) $z = xf(x+y) + yg(x+y), z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$

$$z_x = f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y), \quad z_{xx} = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$

$$z_y = xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y), \quad z_{yy} = xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y)$$

$$z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) - 2f'(x+y) - 2xf''(x+y) - 2g'(x+y) - 2yg''(x+y)$$

$$+ xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y) = 0$$

(c) $z = f(x+at)\, g(x-at), \quad z_{tt} = a^2 z_{xx}$

$$z_x = f'(x+at) + g'(x-at), \quad z_{xx} = f''(x+at) + g''(x-at)$$

$$z_t = af'(x+at) - ag'(x-at), \quad z_{tt} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at)$$

$$z_{tt} = a^2(f''(x+at) + g''(x-at)) = a^2 z_{xx}$$

(d) $z = f(x,y) + \sqrt{xy}\, g(\frac{y}{x}), \quad x^2 z_{xx} = y^2 z_{yy}$

$$z_x = y f'(xy) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} g(\frac{y}{x}) - \frac{y^{3/2}}{x^{3/2}} g'(\frac{y}{x})$$

$$z_{xx} = y^2 f''(xy) - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}} g(\frac{y}{x}) + \frac{3}{2}\frac{y^{3/2}}{x^{5/2}} g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^{5/2}}{x^{7/2}} g''(\frac{y}{x})$$

$$z_y = x f'(xy) + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} g(\frac{y}{x}) + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} g'(\frac{y}{x})$$

$$z_{yy} = x^2 f''(x,y) - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y^{3/2}} g(\frac{y}{x}) + \frac{1}{2\sqrt{xy}} g'(\frac{y}{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} g'(\frac{y}{x}) + \frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}} g''(\frac{y}{x})$$

$$x^2 z_{xx} = y^2\left(x^2 f''(xy) - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y^{3/2}} g(\frac{y}{x}) + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} g'(\frac{y}{x}) + \frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}} g''(\frac{y}{x}) \right) = y^2 z_{yy}$$

21. (a) $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0. \quad A(1,1,1).$

$$F_x = -y, \quad F_y = -x + z + 3y^2, \quad F_z = 3z_2 + y, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-y}{3z^2 + y} = \frac{y}{3z^2 + y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)} = \frac{1}{4}$$

(b) $F = z^3 + xyz + xy^2 - 1, \quad B(1,1,0)$

$F_x = yz + y^2, \quad F_y = xz + 2xy, \quad F_z = 3z^2 + xy.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{yz + y^2}{3z^2 + xy} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,0)} = \frac{-1}{1} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{xz + 2xy}{3z^2 + xy} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1,0)} = \frac{2}{1} = 2.$$

(c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \qquad (2,3,6)$

$$F(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 \Rightarrow z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^2}{x^2} \Rightarrow z_x(2,3,6) = -\frac{36}{4} = -9$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{z^2}} = -\frac{z^2}{y^2} \Rightarrow z_y(2,3,6) = -\frac{36}{9} = -4$$

(ç) $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z) = 0, \qquad (\pi,\pi,\pi)$

$F(x, y, z) = \sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z)$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(x+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \Rightarrow z_x(\pi,\pi,\pi) = -1$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(y+z)}{\cos(y+z) + \cos(x+z)} \Rightarrow z_y(\pi,\pi,\pi) = -1$$

22. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \qquad z_{xx} = -\frac{z - z_x . x}{z^2} = \frac{xz_x - z}{z^2} = \frac{-x^2 - z^2}{z^3}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{2}, \qquad z_{yy} = -\frac{z - z_y . y}{z^2} = \frac{-y^2 - z^2}{z^3}, \qquad z_{xy} = \frac{xz_y}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}$$

23. $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} - \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} - \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = -1$ bulunur.

24. $F(x, y, z) = f(y - bz) + az - x = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{Fx}{Fz} = -\frac{-1}{f'(y-bz)(-b)+a} = \frac{1}{a - bf'(y-bz)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Fy}{Fz} = -\frac{f'(y-bz)}{f'(y-bz)(-b)+g} = \frac{g'(y-bz)}{a - bf'(y-bz)}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{a - bf'(y-bz)}{a - bf'(y-bz)} = 1$$

25. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{dv}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(u).1 = f'(u)$ *ve* $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{dv}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial y} = f'(u).1 = f'(u)$

bulunur. Buradan $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ olduğu görülür.

26. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{dv}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(u).1 = f'(u)$ ve $\dfrac{dv}{dy} = \dfrac{dv}{du}.\dfrac{\partial u}{\partial y} = f'(u).(-1) = -f'(u)$

bulunur. Buradan $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$ *bulunur.*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}(-f'(u))\frac{\partial u}{\partial y} = -f''(u).(-1) = f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}(-f'(u)).\frac{\partial u}{\partial y} = -f''(u).(-1) = f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f'(u)) = \frac{\partial}{\partial u}(f'(u)).\frac{\partial u}{\partial y} = -f''(u)$$

*o*lacağından $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ *dir.*

27. $s = f(x, y), \quad x = u + v, \quad y = u - v$

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial x}.1 + \frac{\partial s}{\partial y}.1$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\right).1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\right)(-1)$$

$$= \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$$

olur.

28. $$f_x = 2\alpha x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-1} \Rightarrow f_{xx} = 2\alpha\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-1} + 4x^2\alpha(\alpha-1)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-2}$$

olur. Benzer şekilde

$$f_{yy} = 2\alpha\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-1} + 4y^2\alpha(\alpha-1)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-2}$$

$$f_{zz} = 2\alpha\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-1} + 4z^2\alpha(\alpha-1)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-2}$$

bulunur.

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 6\alpha\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-2}.\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$= \left[6\alpha + 4\alpha(\alpha-1)\right]\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha-1} = 0$$

olması için

$$6\alpha + 4\alpha(\alpha-1) = 0 \Rightarrow 4\alpha^2 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{veya} \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

olamalıdır.

YÖNLÜ TÜREVLER

TANIM

$w = f(x, y, z)$ bağıntısıyla tanımlanan f fonksiyonu verilmiş olsun.

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x,y,z)\mathbf{j} + f_z(x,y,z)\mathbf{k}$$

vektörüne f fonksiyonunun (x,y,z) noktasındaki **gradiyenti** denir.

TANIM

P, f nin tanım kümesinde bir nokta ve u da bir vektör olsun.

$$D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot u$$

ifadesine f fonksiyonunun u vektörü yönündeki türevi denir.

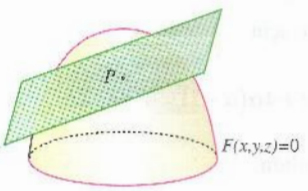
Bir fonksiyonunun gradiyenti ile yönlü türevi arasında

$$-|\nabla f(x,y,z)| \le D_u f(x,y,z) \le |\nabla f(x,y,z)|$$

bağıntısı vardır. Dolayısıyla yönlü türevin alacağı en büyük değer $|\nabla f(x,y,z)|$, en küçük değer $-|\nabla f(x,y,z)|$ dir.

KİSMİ TÜREVLERİN GEOMETRİK ANLAMI

$F(x,y,z) = 0$ denklemiyle tanımlanan yüzey ve bu yüzey üzerinde bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktası verilmiş olsun. Yüzeye $P(x_0, y_0, z_0)$ nokasında çizilen teğet düzlemin denklemi



$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

dır. Yüzey denklemi $z = f(x, y)$ biçiminde verilirse düzlem denklemi

$$f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0) = 0$$

olur.

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN TAYLOR AÇILIMI

TANIM

$Z = f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\right]^{(k)}$$

$$= f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b^2)\right] + \ldots$$

serisine f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki Taylor serisi denir.

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

PROBLEMLER

- Yönlü Türevler
- Kısmi Türevlerin Geometrik Anlamı
- Taylor Açılımı

1. Aşağıda verilen fonksiyonların belirtilen noktalardaki ∇f gradiyentini bulunuz.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x \ln z$, $P(1,1,1)$

(b) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \ln(xyz)$, $P(-1,2,-2)$

(c) $f(x,y,z) = \arctan\frac{x}{y} + \ln(xz)$, $P(1,1,1)$

2. Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında yazılı v vektörleri yönündeki türevini hesaplayınız.

(a) $f(x,y) = 3xy - y^2$, $v = 3i - 4j$

(b) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$, $v = 5i + 12j$

(c) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $v = 2i - 3j + 6k$

(d) $f(x,y,z) = 3e^x \sin(xy)$, $v = 3i - 4j + 12k$

3. Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında yazılı v vektörü yönündeki türevinin verilen noktadaki değerini bulunuz.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $v = 2i + 3j + 6k$, P(1,1,0)

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 3z^2$, $v = i + j + k$, P(1,1,1)

(c) $f(x,y,z) = ? + yz$, $v = 2i + j - 2k$, P(0,1,1)

(d) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $v = i + 2j + 2k$, P(1,1,3)

4. $P(x,y,z)$ noktası $P_0(3,4,12)$ noktasından $u = 3i + 6j - 2k$ yönünde $ds = 0{,}1$ birim hareket etse

$$f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

fonksiyonunun değerinde ne kadarlık bir değişme olur?

5. $P(x,y,z)$ noktası O(0,0,0) orijin noktasından

$u = 2i + 2j - 2k$ yönünde $ds = 0{,}1$ birim hareket ettiğinde

$$g(x,y,z) = e^x \cos(xz)$$

fonksiyonun değerinde ne kadarlık bir değişme olur?

6. $P(x,y,z)$ noktası $P_0(2,-1,0)$ noktasından $P_1(0,1,2)$ noktasına doğru ds = 0,2 birim hareket ettiğinde

$$h(x,y,z) = x + x\cos z - y\sin z + y$$

fonksiyonunun değerinde ne kadarlık değişme olur?

7. $P(x,y,z)$ noktası $P_0(-1,-1,-1)$ noktasından orijine doğru $ds = 0{,}1$ birim hareket ederse

$$f(x,y,z) = \cos t(\pi xy) + xz^2$$

fonksiyonunun değerinde ne kadar değişme olur?

8. M(2,1,3) ve N(5,5,15) noktaları veriliyor.

$f(x,y,z) = xy + yz + zx$ fonksiyonunun **MN** yönündeki türevini bulunuz. Bu türevin M noktasındaki değerini hesaplayınız.

9. $f(x,y,z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ fonksiyonunun eksenlerle α, β, γ açılarını yapan vektör yönündeki türevini hesaplayınız. Bu türevin orijindeki değerini bulunuz.

10. $f(x,y,z) = x^2 - 3yz + 5$ fonksiyonunun koordinat esenleriyle eşit açılar yapan vektör yönündeki türevini bulunuz.

11. $z = x^2 - xy - 2y^2$ fonksiyonunun Ox ekseniyle 60 derecelik açı yapan vektör yönündeki türevini bulunuz. Bu türevin P(1,2) noktasındaki değerini hesaplayınız.

12. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun birinci açıortay doğrultusundaki türevini hesaplayınız. Türevin $P(1,1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

13. Aşağıdaki fonksiyonların verilen noktalardaki yönlü türevlerinin en büyüğünü ve en küçüğünü bulunuz.

(a) $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$, $P(1,-2)$

(b) $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin y$, $P(1,0)$

(c) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$, $P(1,1,1)$

(d) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sin(xyz)$, $P(1,1,0)$

(e) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{xy^2z^3}$, $P(2,2,2)$

14. Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun $P(1,2)$ noktasında $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ yönündeki türevi $2\sqrt{2}$, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{j}$ yönündeki türevi -3 dir. Bu fonksiyonun $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ yönündeki türevini bulunuz.

15. $f(x,y,z)$ fonksiyonunun bir P noktasındaki en büyük türevi $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ yönündeki türevi olup bu türevin değeri $2\sqrt{3}$ dür.

(a) ∇f nin P noktasındaki değerini bulunuz.

(b) f fonksiyonunun $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ yönündeki türevinin P noktasındaki değerini hesaplayınız.

16. $f(x,y) = x^2y^2 - 4xy^2 + 5xy + 4$ ifadesini $x - 1$ ve $y - 2$ nin kuvvetleri cinsinden yazınız.

17. $f(x,y) = \cos(xy)$ ifadesini $(0,0)$ noktası civarında Taylor serisine açınız.

18. Aşağıdaki yüzeylerin karşılarında yazılı noktalardaki teğet düzlemlerinin denklemini bulunuz.

(a) $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 73$, $P(2,2,3)$

(b) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 1$, $P(1,-1,1)$

(c) $xyz + x^2 - 2y^2 + z^3 = 14$, $P(5,-2,3)$

(ç) $xyz = 1$, $P(1,1,1)$

(d) $x^2 + y^2 + z^2 = 7$, $P(1,1,1)$

(e) $x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7$, $P(1,-1,3)$

(f) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $P(1,0,0)$

(g) $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $P(0,0,1)$

(h) $z = \sqrt{y - x}$, $P(1,2,1)$

(i) $z = 4x^2 + y^2$, $P(1,1,5)$

19. $z = 9 - 4x^2 - y^2$ paraboloidinin hangi noktasındaki teğeti $z = 4y$ düzlemine paraleldir.

20. $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy = 12$ yüzeyinin hangi noktalarındaki teğet düzlemleri xOz düzlemine paraleldir?

21. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ yüzeyine herhangi bir noktasından çizilen teğet düzlemin koordinat eksenlerinden ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları toplamının sabit olduğunu gösteriniz.

22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidine üzerindeki $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denkleminin

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

olacağını gösteriniz.

23. $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ paraboloidine üzerindeki bir $P_0(x_0,y_0,z_0)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denkleminin

$$c(z + z_0) = \frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2}$$

olacağını gösteriniz.

24. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ yüzeyinin $2x + 4y + 6z = 3$ düzlemine paralel olan teğet düzleminin denklemini yazınız.

25. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ yüzeyi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu noktadaki teğet düzlemi yOz düzlemine paralel olsun.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x\,lnz \quad P(1,1,1)$

$f_x(x,y,z) = 2x + lnz \Rightarrow f_x(1,1,1) = 2, \quad f_y(x,y,z) = 2y \Rightarrow f_y(1,1,1) = 2, \quad f_z(x,y,z) = 2z + \frac{x}{z} \Rightarrow f_z(1,1,1) = 3$

olduğundan

$$grad f = \nabla f = 2i + 2j + 3k$$

olur.

(b) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + ln(xyz), \quad P(1,2,-2)$

$f_x(x,y,z) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + \frac{1}{x} \Rightarrow f_x(-1,2,-2) = -\frac{26}{27}$

$f_y(x,y,z) = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + \frac{1}{y} \Rightarrow f_y(-1,2-2) = -2.\frac{1}{27} - \frac{1}{2} = -\frac{31}{54}$

$f_z(x,y,z) = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + \frac{1}{z} \Rightarrow f_z(-1,2-2) = \frac{1}{27} - \frac{1}{2} = -\frac{26}{27}$

$\nabla f(-1,2,-2) = -\frac{26}{27}i - \frac{31}{54}j - \frac{26}{27}k = -\frac{1}{54}(52i + 31j + 52k)$

(c) $f(x,y,z) = arctan\frac{x}{y} + ln(xz), \qquad P(1,1,1)$

$f_x(x,y,z) = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} + \frac{1}{x} = \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \Rightarrow f_x(1,1,1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$f_y(x,y,z) = \frac{\frac{-x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow f_y(1,1,1) = -\frac{1}{2}, \quad f_z(x,y,z) = \frac{1}{z} \Rightarrow f_z(1,1,1) = 1$

$\nabla f(1,1,1) = \frac{3}{2}i - \frac{1}{2}j + k = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ olur.

2. (a) $f(x,y) = 3xy - y^2, \quad v = 3i - 4j \Rightarrow \vec{u} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$

$\nabla f(x,y,z) = 3yi - (3x - 2y)j$ olacağından

$D_v f(x,y,z) = [3yi - (3x - 2y)j] \cdot (\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}i) = \frac{9}{5}.y + \frac{4}{5}(3x - 2y) = \frac{12}{5}.x + \frac{1}{5}.y$

(b) $f(x,y,z) = xy + yz + zx, \quad v = 2i - 3j + 6k, \quad u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{2}{7}i - \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k$

$\nabla f(x,y,z) = (y + z)\,i + (x + z)\,j + (x + y)k$

$D_v f(x,y,z) = \frac{2}{7}(y + z) - \frac{3}{7}(x + z) + \frac{6}{7}(x + y) = \frac{3}{7}x + \frac{8}{7}.y - \frac{1}{7}z$

3. (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad v = 2i + 3j + 6k, \quad P(1,1,0)$

$\nabla f(x,y,z) = 2xi + 2yj + 2zk, \quad u = \dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{2}{7}i + \dfrac{3}{7}j + \dfrac{6}{7}k$

$D_v f(1,1,0) = (2i + 2j + 0k) \cdot \left(\dfrac{2}{7}i + \dfrac{3}{7}j + \dfrac{6}{7}k\right) = \dfrac{10}{7}.$

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 3z^2, \quad v = i + j + k, \quad P(1,1,1)$

$\nabla f(1,1,1) = 2i + 2j - 6k, \quad u = \dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$

$D_v(1,1,1) = (2i + 2j - 6k) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(2 + 2 - 6) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} + yz, \quad v = 2i + j - 2k, \quad P(0,1,1) \quad u = \dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{2}{3}i + \dfrac{1}{3}j - \dfrac{2}{3}k$

$\nabla f(x,y,z) = \dfrac{1}{y}i + \left(-\dfrac{x}{y^2} + z\right)j + yk \Rightarrow \nabla f(0,1,1) = i + j + k.$

$D_v f(0,1,1) = (i + j + k) \cdot \left(\dfrac{2}{3}i + \dfrac{1}{3}j - \dfrac{2}{3}k\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

4. $df = D_u f(x,y,z)ds, \quad \nabla f = \left(\dfrac{xi}{x^2 + y^2 + z^2} + \dfrac{yj}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{zk}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$

$\dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{3}{7}i + \dfrac{6}{7}j - \dfrac{2}{7}k$ olacağından

$D_u f(x,y,z) = \dfrac{1}{7(x^2 + y^2 + z^2)}(3x + 6y - 2z) \Rightarrow D_u f(3,4,12) = \dfrac{1}{7.169}(9 + 24 - 24) = \dfrac{9}{7.169}$

$df \cong \dfrac{9}{7.169}.0,1 = 0,0007.$

5. $\nabla g(x,y,z) = (e^x cos(xz) - ze^x sin(xz), 0, -xe^x sin(xz)) \Rightarrow \nabla f(0,0,0) = (1,0,0)$ ve

$\dfrac{u}{\|u\|} = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{-1}{6}\right)$ olacağından $D_u f(0,0,0) = \dfrac{1}{6}$ dır.

$dg \cong D_u f(0,0,0)\, ds = \dfrac{1}{6}.0,1 = \dfrac{1}{60} \cong 0,0166$ bulunur.

6. $P_0P_1 = (-2,2,2), \quad u = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(-2,2,2)$

$\nabla h(x,y,z) = (1 + cosz, \quad 1 - cosz, \quad -xsin - zycosz) \Rightarrow \nabla h(2,-1,0) = (2,0,1)$ olacağından

$D_u f(2,-1,0) = (2,0,1) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{14}}(-2,2,2) = -\dfrac{2}{\sqrt{14}}$ dır.

$dh \cong D_u h(2,-1,0)\, .ds = -\dfrac{2}{\sqrt{14}}\, .0,2 = -0,107$ olur.

7. $\nabla f(x,y,z) = (-\pi y\, sin(\pi xy) + z^2,\ -\pi x sin(\pi xy),\ 2xz) \Rightarrow \nabla f(-1,-1,-1) = (1,0,2),\ u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$D_u f(-1,-1,-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+0+2) = \sqrt{3}$ olur. Buna göre

$df \cong \sqrt{3}.ds = \sqrt{3}.(0,1) \cong 0{,}173$ bulunur.

8. $MN = (3,4,12),\quad u = \frac{1}{\|MN\|}MN = \left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13}\right),\quad \nabla f(x,y,z) = (y+z,\ x+z,\ x+y)$

$D_u f(x,y,z) = \frac{1}{13}\left[3(y+z)+4(x+z)+12(x+y)\right] \Rightarrow D_u f(2,1,3) = \frac{1}{13}\left[3.4+4.5+12.3\right] = \frac{68}{13}.$

9. $\nabla f(x,y,z) = \frac{e^x}{e^x+e^y+e^z}i + \frac{e^y}{e^x+e^y+e^z}j + \frac{e^z}{e^x+e^y+e^z}k,\quad u = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma).$

$D_u f(x,y,z) = \frac{1}{e^x+e^y+e^z}\ (e^x cos\alpha + e^y cos\beta + e^z cos\gamma)$

10. $u = (cos\alpha, cos\alpha, cos\alpha)$ ise $cos^2\alpha + cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

olmalıdır. Şu halde $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ yönündeki türev alınacaktır.

$\nabla f(x,y,z) = (2x, -3z, -3y)$ olacağından $D_u f(x,y,z) = \pm\frac{2x-3z-3y}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-3z-3y)$ dir.

11. $\nabla z = (2x-y,\ -x-4y),\quad u = (cos60°,\ sin60°) = \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$

$D_u f(x,y) = \frac{2x-y-\sqrt{3}x-4\sqrt{3}y}{2} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)x-\left(1+4\sqrt{3}\right)y}{2}$

$D_u f(1,2) = \frac{2-\sqrt{3}-\left(1+4\sqrt{3}\right)2}{2} = -\frac{9}{2}\sqrt{3}.$

12. $z = ln\sqrt{x^2+y^2} = ln(x^2+y^2),\quad \nabla f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}i + \frac{y}{x^2+y^2}j,\quad u = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$

$D_u f(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2\left(x^2+y^2\right)}(x+y) = \frac{\sqrt{2}(x+y)}{2\left(x^2+y^2\right)} \Rightarrow D_u f(1,1) = \frac{\sqrt{2}.2}{2.2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

13. (a) $f_x = \frac{y}{x^2}.\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad f_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$\nabla f(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}i + \frac{x}{x^2+y^2}j \Rightarrow \|\nabla f(x,y)\| = \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow \|\nabla f(1,2)\| = \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} \le D_u f(1,2) \le \frac{1}{5}$

Yönlü türevin alabileceği en büyük değer $\frac{1}{5}$ en küçük değer $-\frac{1}{5}$ tir.

(b) $f(x,y) = x^2 y + e^{xy} \sin y$, P (1,0)

$f_x = 2xy + ye^{xy} \sin y \Rightarrow f_x(1,0) = 0$, $f_y = x^2 + xe^{xy}\sin y + e^{xy}\cos y \Rightarrow f_y(1,0) = 2$

$\|\nabla f\| = \sqrt{0+4} = 2$ olacağından en büyük yönlü türev 2, en küçük yönlü türev –2 dir.

(c) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$ $P(1,1,1)$

$f_x(x,y,z) = \frac{2}{x} \Rightarrow f_x(1,1,1) = 2$, $f_y(x,y,z) = \frac{2}{y} \Rightarrow f_y(1,1,1) = 2$, $f_z = \frac{2}{z} \Rightarrow f_z(1,1,1) = 2$,

$\|\nabla f\| = (4+4+4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$ olur.

En büyük yönlü türev $\|\nabla f\|_{(1,1,1)} = \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$, en küçük yönlü türev $-\|\nabla f\|_{(1,1,1)} = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ dir.

(d) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sinh(xyz)$ P(1,1,0)

$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2-1} + yz\cosh(xyz)$, $f_y = \frac{2y}{x^2+y^2-1} + xz\cosh(xyz)$, $f_z = xy\cosh(xyz)$

$f_x(1,1,0) = 2$, $f_y(1,1,0) = 2$, $f_z(1,1,0) = 1$ olduğundan

$\|\nabla f(1,1,1)\| = \sqrt{4+4+1} = 3$ tür. Dolayısıyla en büyük türeve 3, en küçük türev –3 tür.

(e) $f(x,y,z) = \sqrt{xy^2z^3}$ $x^{1/2}yz^{3/2}$, P(2,2,2)

$f_x = \frac{1}{2}x^{-1/2}yz^{3/2}$, $f_y = x^{1/2}z^{3/2}$, $f_z = \frac{3}{2}x^{1/2}yz^{1/2}$

$f_x(2,2,2) = 2$, $f_y(2,2,2) = 4$, $f_z(2,2,2) = 6$ olacağından $\|\nabla f\| = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ tür. O halde

yönlü türevin alabileceği en büyük değer $2\sqrt{14}$ en küçük değer – $2\sqrt{14}$ tür.

14. $a = i + j$ yönündeki birim vektör, $\|a\| = \sqrt{2}$ olduğundan, $u = \frac{a}{\|a\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right)$ vektörüdür.

$(D_u f)_{(1,2)} = f_x u_1 + f_y u_2 = \frac{f_x}{\sqrt{2}} + \frac{f_y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow f_x + f_y = 4$ olur.

$b = -2j$ yönündeki birim vektör, $\|b\| = 2$ olduğundan, $v = \frac{b}{\|b\|} = -j$ vektörüdür.

$(D_u f)_{(1,2)} = f_x v_1 + f_y v_2 = f_x 0 - f_y = -f_y = -3 \Rightarrow f_y = 3 \Rightarrow f_x = 1 \Rightarrow \nabla f = (1,3)$. olur.

$D_c f(1,2) = (f_x, f_y).\frac{c}{\|c\|} = (1,3).\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{7}{15}$.

15. (a) En büyük türev gradiyent yönündeki türev olduğundan, gradiyent $\nabla f = (k,k,-k)$ biçimindedir.

$\nabla f.\frac{a}{\|a\|} = 2\sqrt{3} \Rightarrow (k,k,-k)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = 2\sqrt{3} \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \nabla f(P) = (2,2,-2)$ *dir.*

$u = \frac{b}{\|b\|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \Rightarrow D_b f = \nabla f_{(P)}.u = (2,2,-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

olur.

16. $f(x,y) \approx f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(1,2)(x-1)^2+2f_{xy}(1,2)(x-1)+f_{yy}(1,2)(y-2)^2\right]$

$+\frac{1}{3!}[f_{xxx}(1,2)(x-1)^3+3f_{xxy}(1,2)(x-1)^2(y-2)+3f_{xyy}(1,2)(x-1)(y-2)^2+f_{yyy}(1,2)(y-2)^3]+\ldots$

$f(x,y)=x^2y^2-4xy^2+5xy+4 \Rightarrow f(1,2)=3$

$f_x=2xy^2-4y^2+5y \Rightarrow f_x(1,2)=2, \quad f_y=2x^2y-8xy+5x \Rightarrow f_y(1,2)=1, \quad f_{xx}=2y^2$

$f_{xy}=4xy-8y+5 \Rightarrow f_{xy}(1,2)=-3, \quad f_{yy}=2x^2-8x \Rightarrow f_{yy}(1,2)=-14, \quad f_{xxx}=0$

$f_{xxy}=4y \Rightarrow f_{xxy}(1,2)=8, \quad f_{xyy}=4x-8 \Rightarrow f_{xyy}(1,2)=-4 \quad f_{yyy}=0$

$f_{xxxx}=0 \quad f_{xxxy}=0 \quad f_{xxyy}=4$

$f_{xyyy}=0 \quad f_{yyyy}=0 \quad f_{xxyy}=4$

$f(x,y) \equiv -3+2(x-1)+1(y-2)+\frac{1}{2!}\left[8(x-1)^2+2(-3)(x-1)(y-2)-14(4-2)^2\right]$

$+\frac{1}{3!}\left[0+3.8(x-1)^2(y-2)+3(-4)(x-1)(y-2)^2+0\right]+\frac{1}{4!}\left[0+6.4.(x-1)^2(y-2)^2+0\right]$

$=-3+2(x-1)+(y-2)+4(x-1)^2-3(x-1)(y-2)-7(y-2)^2+4(x-1)^2(y-2)$

$-2(x-1)(y-2)^2+(x-1)^2(y-2)^2$

17. $\cos u=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^6}{6!}+\ldots..$

olduğundan

$\cos xy=1-\frac{(xy)^2}{2!}+\frac{(xy)}{4!}-\frac{(xy)^6}{6!}+\ldots...=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(xy)^{2k}}{(2k)!}$

bulunur.

18. (a) $F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$

$F_x=6x \Rightarrow F_x(2,2,3)=12, \quad F_y=8y \Rightarrow F_y(2,2,3)=16, \quad F_z=10z \Rightarrow F_z(2,2,3)=30$ olacağından

$12(x-2)+16(y-2)+30(z-3)=0 \Rightarrow 12x+16y+30z=146 \Rightarrow 6x+8y+15z=73$

(b) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=1, \qquad P(1,-1,1)$

$F_x=\frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad F_y=\frac{1}{3}y^{-2/3}, \quad F_z=\frac{1}{3}z^{-2/3} \Rightarrow F_x(1,-1,1)=\frac{1}{3} \quad F_y(1,-1,1), \quad F_z(1,-1,1)=\frac{1}{3}$

olur. Teğet düzlemin denklemi

$\frac{1}{3}(x-1)+\frac{1}{3}(y+1)+\frac{1}{3}(z-1)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=\frac{1}{3} \Rightarrow x+y+z=1$

(ç) $F_x=yz, \quad F_y=xz, \quad F_2=xy, \quad F_x(1,1,1)=1, \quad F_y(1,1,1)=1, \quad F_z(1,1,1)=1$

$1(x-1)+1(y-1)+1.(z-1)=0 \Rightarrow x+y+z=3.$

(f) $z = \ln(x^2+y^2) \Rightarrow \ln(x^2+y^2) - z = 0, \qquad P(1,0,0)$

$$F_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad F_y = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad F_z = -1 \Rightarrow F_x(1,00) = 2, \quad F_y(1,00) = 0$$

$$2(x-1) + 0.(y-0) - 1(z-0) = 0 \Rightarrow 2x - z = 2.$$

(g) $e^{-(x^2+y^2)} - z = 0, \qquad P(0,0,1)$

$$F_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}, \quad F_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}, \quad F_z = -1 \Rightarrow F_x(0,0,1) = F_y(0,0,1) = 0$$

Teğet düzlemin denklemi $-(z-1) = 0 \Rightarrow z = 1$ olur.

h) $\sqrt{y-x} - z = 0, \qquad P(1,2,1)$

$$F_x = \frac{-1}{2\sqrt{y-x}}, \quad F_y = \frac{1}{2\sqrt{y-x}}, \quad F_z = -1 \Rightarrow F_x(1,2,1) = -\frac{1}{2}, \quad F_y(1,2,1) = \frac{1}{2}, \quad F_z(1,2,1) = -1$$

olur. Teğet düzlemin denklemi

$$-\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-2) - 1(z-1) = 0 \Rightarrow x - y + 2z = 1 \text{ olur.}$$

19. $z = 9 - 4x^2 - y^2$ yüzeyine (a,b,c) noktasında çizilen teğet düzlemin denklemi

$$-8a(x-a) - 2b(y-b) - (z-c) = 0 \Rightarrow -8ax - 2by - z + 8a^2 + 2b^2 + c = 0$$

olur. $c = 9 - 4a^2 - b^2 \Rightarrow (9-c).2 = 8a^2 + b^2$ olacağından yukarıdaki düzlem denklemi $8ax + 2by + z = c - 18$ şeklini alır. Bu düzlemin $z = 4y$ düzlemine paralel olması için $a = 0$, $\frac{2b}{-4} = \frac{1}{1} \Rightarrow b = -2$ olmalıdır. $c = 9 - 4.0 - 4 = 5$ olacağından istenen nokta $(0,-2,5)$ noktasıdır.

20. Söz konusu nokta (a,b,c) olsun.

$F_x(a,b,c) = 2a - 2b$, $F_y(a,b,c) = -2a + 8b$, $F_z(a,b,c) = 32c$ olacağından düzlemin denklemi

$$(2a-2b)(x-a) + (-2a+8b)(y-b) + (32c)(z-c) = 0$$

dır. xOz düzlemine paralel olan düzlemin denklemleri $y = k$ biçiminde olduğundan yukarıdaki denklemde x ve z nin katsayıları sıfır olmalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} 2a-2b=0 \\ 32c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b, \ c = 0 \text{ yüzeyin bir noktası olduğundan } a^2 + 4b^2 + 16c^2 - 2ab = 12 \Rightarrow 3a^2 = 12 \Rightarrow a = \pm 2$$

olur. Şu halde istenen noktalar $A(2,2,0)$ ve $B(-2,-2,0)$ noktalarıdır.

21. (p, q, r) noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım.

$$F_x(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad F_y(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad F_z(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \text{ olduğundan, düzlemin denklemi}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}(x-p) + \frac{1}{2\sqrt{q}}(y-q) + \frac{1}{2\sqrt{r}}(z-r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}}(x-p) + \frac{1}{\sqrt{q}}(y-q) + \frac{1}{\sqrt{r}}(z-r) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} + \frac{z}{\sqrt{r}} = \left(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}\right) \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} + \frac{z}{\sqrt{r}} = \sqrt{a}$$

olur. Bu düzlem Ox- eksenini $x=\sqrt{a}\sqrt{p}$, Oy eksenini $y=\sqrt{a}\sqrt{q}$, Oz eksenini $z=\sqrt{a}\sqrt{r}$ noktasında keser. Eksen parçalarının uzunlukları toplamı

$$\ell=\sqrt{a}\sqrt{p}+\sqrt{a}\sqrt{q}+\sqrt{a}\sqrt{r}=\sqrt{a}\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}\right)=\sqrt{a}.\sqrt{a}=a$$

olur.

22. $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$ olduğundan

$$F_x\left(x_0,y_0,z_0\right)=\frac{2x_0}{a^2},\quad F_y\left(x_0,y_0,z_0\right)=\frac{2y_0}{b^2},\quad F_z\left(x_0,y_0,z_0\right)=\frac{2z_0}{c^2}$$ dır. Teğet düzlemin denklemi

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0 \Rightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-1=0 \Rightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

bulunur.

23. $z=\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$, $z_x=\dfrac{2x}{ca^2}$, $z_y=\dfrac{2y}{cb^2}$ olacağından, düzlemin denklemi

$$z_x\left(x_0,y_0\right)(x-x_0)+z_x\left(x_0,y_0\right)(y-y_0)-(z-z_0)=0 \Rightarrow \frac{2x_0}{ca^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{cb^2}(y-y_0)=z-z_0 \Rightarrow$$

$$\frac{2xx_0}{ca^2}+\frac{2yy_0}{cb^2}=z-z_0+\frac{2x_0^2}{ca^2}+\frac{2y_0^2}{cb^2} \Rightarrow \frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=c(z-z_0)+2cz_0 \Rightarrow \frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=c(z+z_0)$$

olur.

24. $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$ olsun. Yüzeyin (x_0, y_0, z_0) noktasındaki teğet düzleminin denklemi

$$f_x\left(x_0,y_0,z_0\right)(x-x_0)+f_y\left(x_0,y_0,z_0\right)(y-y_0)+f_z\left(x_0,y_0,z_0\right)(z-z_0)=0 \Rightarrow$$

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0 \Rightarrow xx_0+2yy_0+3zz_0=x_0^2+2y_0^2+3z_0^2 \Rightarrow xx_0+2yy_0+3zz_0=21$$

olur. Bu düzlemin $x+4y+6z=0$ düzlemine paralel olması için

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{4}=\frac{3z_0}{6} \Rightarrow x_0=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0=y_0=2x_0$$

olmalıdır. Bu değerler yüzey denkleminde yerine yazılırsa

$$x_0^2+8x_0^2+12x_0^2=21 \Rightarrow x_0^2=1 \Rightarrow x_0=\pm1 \Rightarrow y_0=\pm2 \quad ve \quad z_0=\pm2$$

bulunur. (1,2,2) noktasındaki teğetin denklemi $x+4y+6z=21$. $(-1,-2,-2)$ noktasındaki teğet düzlemin denklemi $-x-4y-6z=21 \Rightarrow x+4y+6z=-21$ olur.

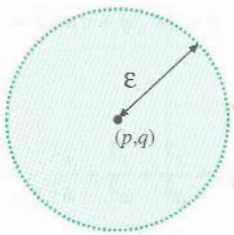
MAKSİMUM VE MİNİMUMLAR

TANIM

$(p, q) \in R^2$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$K(\varepsilon) = \{ (x,y) : \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} < \varepsilon \} \subset R^2$$

kümesine (p, q) merkezli ε– yarıçaplı **açık yuvar** veya (p, q) noktasının **ε– komşuluğu** denir.



TANIM

$A \subset R^2$, $f: A \to R$ bir fonksiyon, $(a, b) \in A$ olsun. Eğer her $(x, y) \in K_1(\varepsilon)$ için

$$f(x, y) \le f(a, b)$$

olacak şekilde, (a, b) noktasının bir $K_1(\varepsilon)$ komşuluğu varsa f fonksiyonu (a, b) noktasında bir **yerel (lokal) maksimuma** sahiptir denir. $f(a, b)$ sahiptir $f(a, b)$ sayısına da fonksiyonunun bir **yerel maksimum değeri** denir.

$(c, d) \in A$ olsun. Eğer her $(x, y) \in K_2(\varepsilon)$ için

$$f(x, y) \ge f(c, d)$$

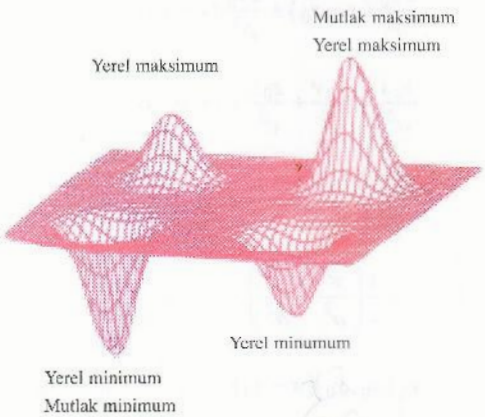
olacak şekilde, (c, d) noktasının bir $K_2(\varepsilon)$ komşuluğu varsa f fonksiyonu (c, d) noktasında bir **yerel (lokal) minimuma** sahiptir denir. $f(c, d)$ sayısına da bir **yerel minimum değer** adı verilir.

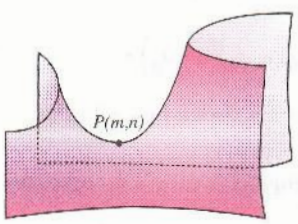
Yerel maksimum ve yerel minimum noklarına fonksiyonun **yerel ekstremum noktaları** denir.

Eğer bir (m, n) noktasının her komşuluğunda $f(x_1, y_1) \le f(m, n)$ olacak şekilde bir (x_1, y_1) ve $f(x_2, y_2) \ge f(m, n)$ olacak şekilde bir (x_2, y_2) noktası varsa (m, n) noktasına bir **eyer noktası** adı verilir.

$(p, q) \in A$ olsun. Her $(x, y) \in A$ için $f(x, y) \in A$ için $f(x, y) \le f(p,q)$ ise f fonksiyonu (p, q) noktasında bir **mutlak maksimuma** sahiptir denir.

Eğer $(r, s) \in A$ ve her $(x, y) \in A$ için $f(x, y) \ge f(r, s)$ ise f fonksiyonu (r, s) noktasında bir **mutlak minimuma** sahiptir denir.





eyer noktası

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

PROBLEMLER

• Maksimum – Minimum

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların yerel ekstremum noktalarını bulup cinsini inceleyiniz. Yerel ekstrem değerlerini hesaplayınız.

   (a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5$

   (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$

   (c) $f(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$

   (d) $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

   (e) $f(x,y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - 9x$

   (f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

   (g) $f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2$

   (h) $f(x,y) = y\sin x$

   (i) $f(x,y) = e^{2x}\cos y$

2. Aşağıdaki denklemleri verilen yüzeylerin yerel ekstremumlarını bulunuz.

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35$

   (b) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z = 8$

3. Aşağıda denklemleri verilen yüzeylerin eğer varsa, en yüksek ve en alçak noktalarını bulunuz.

   (a) $z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3$

   (b) $z = 2x - x^2 + 2y^2 - y^4$

   (c) $z = 3x^4 + 4x^3 + 6y^4 - 16y^3 + 12y^2 + 7$

   (ç) $z = 6y - 2x - x^2 - y^2$

   (d) $z = 2x^2 + 8xy + y^4$

   (e) $z = 1/(10 - 2x - 4y + x^2 + y^4)$

   (f) $z = e^{2x-4y-x^2-y^2}$

4. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı bölgeler üzerinde mutlak ekstremumlarını (en büyük ve en küçük değerlerini) bulunuz.

   (a) $f(x, y) = x + 2y$,

   $B = \{ (x, y) : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1 \}$

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2, B = \{ (x, y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le 2 - 2x \}$

   (c) $f(x, y) = 2xy, \quad B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

   (d) $f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$,

   $B = \{ (x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \}$

   (e) $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$,

   $B = \{ (x, y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le 1 - x \}$

   (f) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x$,

   $B = \{ (x, y) : 0 \le x \le 6,\ -3 \le y \le 3 \}$

   (g) $f(x, y) = (4x - x^2)\cos y$

   $B = \{ (x, y) : 1 \le x \le 3,\ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4} \}$

5. Eğer varsa $f(x, y) = xy + 2x - \ln(x^2y)$ fonksiyonunun $B = \{(x, y) : x \ge 0,\ y \ge 0\}$ üzerinde aldığı en büyük ve en küçük değerini bulunuz.

6. Aşağıdaki integrallerin değerini maksimum yapan a ve b sayılarını bulunuz.

   (a) $\int_a^b \left(5 - 4x - x^2\right) dx$

   (b) $\int_a^b \left(24 - 2x - x^2\right)^{1/3} dx$

7. $xyz = 1$ yüzeyinin orijine en yakın noktasını bulunuz.

8. $z^2 = xy - 3x + 9$ yüzeyi üzerinde orijine en yakın olan noktayı bulunuz.

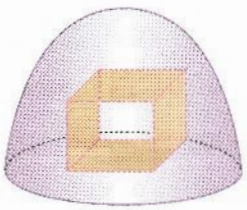
9. Çarpımları 343 olan üç pozitif sayının toplamı en az kaç olur?

10. Toplamları 9 olan üç reel sayının kareleri toplamı en az kaç olur?

11. Yüzey alanı 600 cm^2 olan dikdörtgenler prizmasının hacmi en fazla ne olabilir?

12. Dikdörtgenler prizması biçiminde, üstü açık bir kutunun hacmi 4 m^3 tür. Bu prizmanın yüzey alanı en az kaç m^2 dir?

13. a yarıçaplı bir yarı küre içine yerleştirilen bir dikdörtgenler prizmasının tabanı, yarım kürenin tabanı üzerinde bulunmaktadır. Pirizmanın hacmi en fazla ne olabilir?



14. Oniki ayrıtının uzunlukları toplamı 24 cm olan bir dikdörtgenler pirizmasının hacmi en fazla kaç cm^3 olabilir?

15. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yalı yan şartlar altında ekstremumlarını bulunuz.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $xy = 1$

(b) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $x + 3y - 2z = 4$

(d) $f(x, y, z) = xy^2 z^2$, $x + y + z = 12$

16. $(1, 1, 1)$ noktasının $x + 2y + 3z = 13$ düzlemine olan uzaklığını hesaplayınız.

17. $z = xy + 1$ yüzeyinin orijine en yakın noktasını bulunuz.

18. (x, y, z) noktası $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ küresi üzerinde bulunmak üzere

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerini bulunuz.

19. a yarıçaplı bir küre içine yerleştirilebilen dikdörtgenler pirimasının hacmi en fazla ne olabilir?

20. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi üzerinde bulunan (x, y, z) noktaları için x + z en fazla ne olabilir?

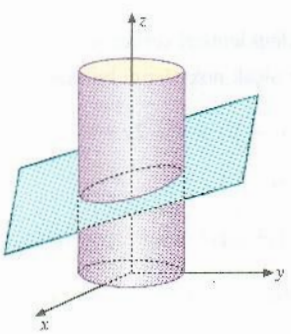
21. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$ elipsoidinin içine, ayrıtları koordinat eksenlerine paralel olan, dikdörtgenler prizması şeklinde bir kutu yerleştirilecektir. Bu kutunun hacmi en fazla kaç birimküp olur?

22. $2x - y = 0$ ve $y + z = 0$ olmak üzere

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$$

fonksiyonunun maksimumunu bulunuz.

24.



$x + y + z = 1$ düzlemiyle $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin arakesiti bir elipstir. Bu elips üzerinde orijine en yakın ve en uzak olan noktaları bulunuz.

☞ ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 4x + 4 = 0 \\ f_y &= 2y - 4 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -1,\ y = 2 \text{ bulunur. Kritik nokta } (-1,2) \text{ dir.}$$

$f_{xx} = 4$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$ olacağından $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}{}^2 = 4.2 - 0 = 8 > 0$ ve $f_{xx} > 0$ dır. O halde,

$(-1, 2)$ noktası yerel minimum noktasıdır.. Yerel minimum değeri $f(-1, 2) = 2 + 4 - 4 - 8 + 5 = -1$ dir.

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + 3y = 0 \\ f_y &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2 + y &= 0 \\ y^2 + x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(-x^2\right)^2 + x = 0 \Rightarrow x^4 + x = 0 \Rightarrow x(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = -1$ olur. Kritik noktalar $A(0,0)$, $B(-1,-1)$ dir. $A(0,0)$ da $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{yy}(0,0) = 0$,

$f_{xy}(0,0) = 3$ olduğundan $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = -9 < 0$ dır. Şu halde A(0,0) bir eyer noktasıdır.

$B(-1,-1)$ noktasında $f_{xx} = -6$, $f_{yy} = -6$ ve $f_{xy} = 3$ olacağından $f_{xx} F_{yy} - f_{xy}^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ ve $f_{xx} < 0$ dır.

O halde $B(-1, -1)$ noktası bir yerel maksimum noktasıdır. $f_{max} = f(-1,-1) = -1 - 1 + 3 + 3 = 4$ olur.

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + xy + \dfrac{1}{y}$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\frac{1}{x^2} + y = 0 \\ f_y(x,y) &= x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\} x - \frac{1}{x^4} = 0 \Rightarrow x - x^4 = 0 \Rightarrow x(1-x)\left(1 + x + x^2\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ veya } x = 1$$

olur. $x = 0$ tanım kümesine ait olmadığından bir ekstremum nokta değildir. $x = 1$ için $y = 1$ dir. $A(1,1)$ kritik noktadır.

$f_{xx} = \dfrac{2}{x^3}$, $f_{xx}(1,1) = 2$, $f_{yy} = \dfrac{2}{y^3}$, $f_{yy}(1,1) = 2$, $f_{xy} = 1$ olacağından $f_{xx} f_{yy} - f_{yy}^2 = 2.2 - 1 = 3 > 0$ dır.

$f_{xx}(1,1) = 2 > 0$ olduğundan $A(1,1)$ noktası bir yerel minimum noktasıdır. $f_{min} = f(1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3$ olur.

(d) $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 12x - 6x^2 + 6y = 0 \\ f_y &= 6y + 6x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -x \text{ ve } 12x - 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 6x(1-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Kritik noktalar $A(0,0)$, $B(1,-1)$ noktalarıdır. $f_{xx} = 12 - 12x$, $f_{yy} = 6$, $f_{xy} = 6$ olduğundan $A(0,0)$ noktasında,

$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 12.6 - 36 = 36 > 0$ ve $f_{yy} > 0$ dır. Şu halde A(0,0) bir yerel minimum noktasıdır. $f_{min} = f(0,0) = 0$ dır.

$B(1,-1)$ noktasında $f_{xx} = 0$, $f_{yy} = 6$, $f_{xy} = 6$ olacağından $f_{xx} f_{xy} - f_{xy}^2 = -36 < 0$ dır. Dolayısıyla $B(1,-1)$ noktası bir eyer noktasıdır.

(e) $f(x,y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - 9x$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + 6y - 9 = 0 \\ f_y &= 6x + 6y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -x \text{ ve } 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3 \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = -3 \text{ bulunur.}$$

$A(-1,1)$ ve $B(3,-3)$ kritik noktalardır. $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6$, $f_{xy} = 6$ olduğundan $f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 36x - 36(x-1)$ dir.

$A(-1,1)$ noktasında $f_{xx}\ f_{yy} - f^2_{xy} = 36(-1-1) = -72 < 0$ olduğundan $A(-1,1)$ bir eyer noktasıdır.

$B(3,-3)$ noktasında $f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 36(3-1) = 72 > 0$ ve $f_{yy} > 0$ olduğundan $B(3,-3)$ nokası bir yerel minimum noktası dır. $f_{min} = f(3,-3) = -27$ dir.

(f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 4x^3 - 4y = 0 \\ f_y &= 4y^3 - 4x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = x^9 \Rightarrow x\left(x^8 - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1 \Rightarrow y_1 = -1,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 1$$

bulunur. Kritik noktalar $A(-1,-1)$, $B(0,0)$, $C(1,1)$ dir. $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = -4$ olduğundan $A(-1,-1)$ noktasında $f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 12.12 - 16 = 128 > 0$ ve $f_{xx} > 0$ olduğundan $A(-1,1)$ noktası bir yerel minimum noktasıdır.

$f_{min} = f(-1,-1) = -2$ olur.

$B(0,0)$ da $f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 0.0 - 16 = -16 < 0$ olduğundan $B(0,0)$ bir eyer noktasıdır.

$C(1,1)$ de $f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 12.12 - 16 = 128 > 0$ ve $f_{xx} > 0$ olduğundan, $C(1,1)$ bir yerel menimum noktasıdır.

$f_{min} = f(1,1) = 1 + 1 - 4 = -2$ dir.

(g) $f(x,y) = 4xy - 2x^4 - y^2$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 4y - 8x^3 = 0 \\ f_y &= 4x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y = 2x \\ &8x - 8x^3 = 0 \Rightarrow 8x\left(1 - x^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$y_1 = -2, y_2 = 0, y_3 = 2$ dir. $A(-1,-2)$, $B(0,0)$, $C(1,2)$ birer kritik noktadır.

$f_{xx} = -24x^2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 4$ olduğundan $f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 48x^2 - 16 = 16(3x^2 - 1)$ dir.

$A(-1,2)$ noktasında $f_{xx}\ f_{yy} - f^2_{xy} = 16(3-1) = 32 > 0$ ve $f_{yy} < 0$ olduğundan $A(-1,2)$ bir yerel maksimim noktasıdır.

$f_{max} = (-1,2) = -8 - 2 - 4 = -14$ tür.

$B(0,0)$ da $f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 0.(-2) - 16 = -16 < 0$ olduğundan $B(0,0)$ bir eyer noktasıdır.

$C(1,2)$ noktasında $f_{xx}f_{yy} - f^2_{xy} = 16(3-1) = 32 > 0$ ve $f_{yy} < 0$ olduğundan, $C(1,2)$ bir yerel maksimum noktasıdır.

$f_{max} = f(1,2) = 8 - 2 - 4 = 2$ dir.

(h) $f(x, y) = y \sin x$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= y\cos x = 0 \\ f_y &= \sin x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = n\pi,\ y = 0$$ olmalıdır. O halde $A(n\pi, 0)$ noktaları birer kritik noktadır. $f_{xx} = -y\sin x$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} = \cos x$ olduğundan $A(n\pi,0)$ noktalarında $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 - 1 = -1 < 0$ olduğundan bu noktalar birer eyer noktasıdır.

(i) $f(x,y) = e^{2x}\cos y$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2e^{2x}\cos y = 0 \\ f_y &= -e^{2x}\sin y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \cos y &= 0 \\ \sin y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Hem kosinüsü hem de sinüsü sıfır olan değer yoktur. Şu halde kritik nokta yoktur.

2.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 35 = 0$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= -\frac{F_x}{F_z} = 0 \Rightarrow F_x = 0 \\ z_y &= -\frac{F_y}{F_z} = 0 \Rightarrow F_y = 0 \end{aligned}\right\}$$ olmalıdır. $$\left.\begin{aligned} F_x &= 2x - 12y + 4z = 0 \\ F_y &= 2y - 12x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 6x, \quad 2x - 72x + 4z = 0 \Rightarrow 4z = 70x \text{ dir.}$$

Bu değerler verilen denklemde yerine yazılırsa

$x^2 + 36x^2 - 12x.6x + 70x^2 = 0 \Rightarrow 35x^2 = 35 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad y_1 = -6, \quad y_2 = 6$ bulunur.

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x - 12y + 4z}{2z + 4x} \Rightarrow z_{xx} = -\frac{(2 + 4z_x)(2z + 4.r) - (2z_x + 4)}{(2z + 4.r)^2}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y - 12x}{2z + 4x} \Rightarrow z_{yy} = -\frac{2(2z + 4x) - (2z_x + 4)(2y - 12x)}{(2z + 4x)^2}$$

$$z_{xy} = -\frac{(-12 + 4z_y)(2z + 4.r) - (2z_y)(2x - 12y + 4z)}{(2z + 4x)^2}$$

bulunur. A ve B kritik noktalarında $z_x = z_y = 0$ olduğundan

$$z_{xx} = -\frac{2(2z + 4x) - 4}{(2z + 4x)^2}, \quad z_{yy} = -\frac{2(2z + 4x) - 4(2y - 12x)}{(2z + 4x)^2} = -\frac{56x - 8y + 4z}{(2z + 4x)^2}, \quad z_{xy} = -\frac{-12(2z + 4x)}{(2z + 4x)^2} = \frac{12}{2z + 4.r}$$

olur. $A(-1,-6)$ noktasında $z_{xx} = -\frac{2(-35 - 4) - 4}{(-35 - 4)^2} = \frac{82}{(39)^2}$, $z_{yy} = -\frac{-56 + 48 - 70}{(39)^2} = \frac{78}{(39)^2}$, $z_{xy} = -\frac{12}{39}$

olur Dolayısıyla

$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \frac{82}{39^2}.\frac{78}{39^2} - \frac{144}{39^2} > 0$ ve $z_{xx} > 0$ olduğundan $A(-1,-6)$ bir yerel minimum noktasıdır. $x = -1$, $y = -6$ için $z = -\frac{35}{2}$ olduğundan $z_{min} = -\frac{35}{2}$ dir. Yüzeyin en alttaki noktası $(-1, -6, -\frac{35}{2})$ dir.

$B(1,6)$ noktasında $z_{xx} = -\frac{2.39 + 4 - 4}{35 + 4} = 2$, $z_{yy} = -\frac{56 - 48 + 70}{39} = \frac{78}{39} = 2$, $z_{xy} = \frac{12}{39}$ olacağından

$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 2.2 - \frac{144}{39^2} > 0$ ve $z_{xx} > 0$ olduğundan $A(1,6)$ noktasıda bir yerel minimum noktasıdır. $z_{min} = \frac{35}{2}$ dir.

(b) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z = 8$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ F_y &= -2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Kritik noktalar } (1,2) \text{ ve } (-1,2) \text{ dir.}$$

$$F_z = 2z + 1$$

$$z_x = -\frac{3x^2 - 3}{2z+1} \Rightarrow z_{xx} = -\frac{6x(2z+1) - 2z(3x^2-3)}{(2z+1)^2} = -\frac{6x}{2z+1}, \quad z_{xy} = -\frac{0.(2z+1) - 2z_y(3x^2-3)}{2z+1} = 0$$

$$z_y = \frac{2y-4}{2z+1}, \quad z_{yy} = \frac{2(2z+1) - 2z_y(2y-4)}{(2z+1)^2} = \frac{2}{2z+1}$$

olur. (1,2) noktası için $1 - 4 - 3 + 8 + z^2 + z = 8 \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0$, $(z-2)(z+3) = 0 \Rightarrow z_1 = 2$, $z_2 = -3$ bulunur.

(–1,2) noktası için benzer olarak $z = -2$, $z = 1$ bulunur. O halde yüzey üzerindeki kritik noktalar $A(1,2,2)$, $B(1,2,-3)$, $C(-1,2,-2)$, $D(-1,2,1)$ noktalarıdır.

$A(1,2,2)$ noktası için $z_{xx} = -\frac{6}{5}$, $z_{yy} = -\frac{2}{5}$ ve $z_{xy} = 0$ olacağından $z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = -\frac{12}{25} < 0$ dır. Dolayısıyla B bri eyer noktasıdır. $C(-1,2,-2)$ nin bir yerel maksimum, $D(-1,2,1)$ in bir yerel minimum noktası olduğu benzer biçimde gösterilebilir.

3.

(a) $z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3$

Birinci yol:

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 2x - 2 = 0 \\ z_y &= 2y - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Kritik nokta A(1,1) noktasıdır.}$$

$z_{xx} = 2$, $z_{yy} = 2$, $z_{xy} = 0$, $z_{xx} z_{xy} - z_{xy}^2 = 4 > 0$ ve $z_{xx} > 0$ olduğundan (1,1) noktası bir yerel minum noktasıdır.

$z_{min} = 1 - 2 + 1 - 2 + 3 = 1$ dir. Yüzeyin en alçak noktası (1, 1, 1) dir.

İkinci yol: Verilen ifade

$z = x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 + 3 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1$ biçiminde yazılabilir. z en küçük değerini $x = 1$ ve $y = 1$ için alır. Alabileceği en küçük değer $z_{min} = 1$ dir. Yüzeyin en alçak noktası (1,1,1) noktasıdır.

(b) $z = 2x - 2x^2 + 2y^2 - y^4$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 2 - 2x = 0 \\ z_y &= 4y - 4y^3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \ \vee \ y = 1 \end{aligned} \Rightarrow \text{Krtiki noktalar A(1,0) ve B(1,1) dir.}$$

$z_{xx} = -2$, $z_{yy} = 4 - 12y^2$, $z_{xy} = 0 \Rightarrow z_{xx} z_{yy} - 2^2_{xy} = 8(3y^2 - 1)$ olacağından A(1,0) noktasında

$z_{xx} z_{yy} - z^2_{xy} = -8 < 0$ olur. Şu halde A(1,0) eyer noktasıdır.

B(1,1) noktasında $z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = 8(3 - 1) = 16 > 0$ ve $z_{xx} < 0$ olduğundan B noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

$z_{min} = z(1,1) = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$ olur.

(c) $z = 3x^4 + 4x^3 + 6y^4 - 16y^3 + 12y^2 + 7$

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 12x^3 + 12x^2 = 0 \\ z_y &= 24y^3 - 48y^2 + 24y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x^2(x+1) &= 0 \\ 24y(y-1)^2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x = 0 \vee x &= -1 \\ y = 0 \vee y &= 1 \end{aligned}$$

Kritik noktalar (0,0), (0,1), (–1,0), (–1,1) noktalarıdır.

$z_{xx} = 36x^2 + 24x = 12x(3x + 2)$, $z_{yy} = 72y^2 - 96y + 24$, $z_{xy} = 0$ olacağından

$z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2 = 12x(3x + 2)\,.24(3y^2 - 4y + 1) = 288x(3x + 2)\,(y - 1)\,(3y - 1)$ bulunur.

(0,0) noktasında $z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$ dır. $f(0,1) = 9 > f(0,0)$ ve $f(-1,0) = 6 < f(0,0)$ olduğundan f fonsiyonu (0,0) ın 1 den büyük komşuluğunda $f(0,0)$ dan büyük ve küçük değerler almaktadır. O halde (0,0) bir eyer noktasıdır.

(0,1), (–1,1) noktaları için de benzer araştırma yapılmalıdır.

(–1,0) noktası için $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 288(-1)(-1)(-1)(-1) = 288 > 0$ ve $z_{xx} = 36 > 0$ olacağından (–1,0) noktası bir yerel minimum noktasıdır. $x = -1$, $y = 0$ içi $z = 3 - 4 = -1$ olduğundan $A(-1,0,-1)$ noktası yüzeyin bir yerel minum noktasıdır.

(ç) $z = 6y - 2x - x^2 - y^2$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = -2 - 2x = 0 \\ z_y = 6 - 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -1,\ y = 3 \Rightarrow \text{kritik nokta } (-1,3) \text{ noktasıdır.}$$

$z_{xx} = -2$, $z_{yy} = -2$, $z_{xy} = 0$ $\Rightarrow$ $z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 = 4 > 0$ ve $z_{xx} < 0$ olduğundan (–1,3) noktası bir yerel maksimum noktasıdır. $x = -1$, $y = 3$ için $z = 18 + 2 - 1 - 9 = 10$ olduğundan $A(-1,3,10)$ noktası yüzeyin bir yerel maksimum noktasıdır. Bu nokta yüzeyin en yüksek noktasıdır. Gerçekten her (x,y) noktası için

$z = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + (x^2 + 6y + 9 - 9) = -(x + 1)^2 + 1 - (y + 3)^2 + 9 = 10 - (x + 1)^2 - (y + 3)^2 \le 10$ dur.

(d) $z = 2x^2 + 8xy + y^4$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 4x + 8y = 0 \\ z_y = 8x + 4y^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2y \\ 2x = -y^3 \end{array}\right\} \Rightarrow -4y = -y^3 \Rightarrow y\left(y^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = -2,\ y_3 = 2$$

olur. Buradan $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -4$ bulunur. O halde kritik noktalar (0,0), (4, –2), (–4,2) dir.

$z_{xx} = 4$, $z_{yy} = 12y^2$, $z_{xy} = 8$, $\Delta = z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2 = 48y^2 - 36 = 12(4y^2 - 3)$.

(0,0) noktasında $\Delta = -36 < 0$ olacağından (0,0) bir eyer noktasıdır.

(4, –2) noktasında $\Delta = 12.61 > 0$ ve $z_{xx} > 0$ olduğundan (4, –2) bir yerel minimum noktasıdır. $x = 4$, $y = -2$ için $z = -16$ olduğundan $A(4, -2, -16)$ yüzeyin bir yerel minimum noktasıdır.. (– 4, 2) noktasında $\Delta = 12.13 > 0$ ve $z_{xx} > 0$ olacağından (– 4, 2) bir yerel minimum noktasıdır. $z_{min} = z(-4, 2) = -16$ olacağından $B(-4, 2, -16)$ da bir yerel minimum noktasıdır.

(e) $z = 1/(10 - 2x - 4y + x^2 + y^4)$, $t = 10 - 2x - 4y + x^2 + y^4$ diyelim. t nin minimum olduğu noktada z maksimum, t nin maksimum olduğu noktada z minimum olur.

$$\left.\begin{array}{l} t_x = -2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ t_y = -4 + 4y^3 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1) \text{ kritik noktasıdır.}$$

$t_{xx} = 2$, $t_{yy} = 12y^2$, $t_{xy} = 0$ $\Rightarrow$ $t_{xx}\, t_{yy} - t_{xy}^2 = 24y^2$ dir.

(1,1) noktasında $t_{xx}\, t_{yy} - t_{xy}^2 = 24 > 0$ ve $t_{xx} > 0$ olacağından (1,1) noktası bir yerel minimum noktasıdır. Dolayısıyla z nin (1,1) de bir yerel maksimumu vardır. $z_{max} = \dfrac{1}{10 - 2 - 4 + 1 + 1} = \dfrac{1}{16}$ olur. Yüzeyin en yüksek noktası $A(1,1,\frac{1}{6})$ noktasıdır.

(f) **I. Çözüm:**

$z = e^{2x - 4y - x^2 - y^2}$ fonksiyonu en büyük ve en küçük değerlerini $t = 2x - 4y - x^2 - y^2$ nin en büyük ve en küçük değerlerini aldığı noktalarda alır.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2-2x=0 \Rightarrow x=1 \\ f_y = -4-2y=0 \Rightarrow y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,-2) \text{ kritik noktadır.}$$

$f_{xx}\,f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0$ ve $f_{xx} < 0$ olduğundan $(1,-2)$ bir yerel maksimum noktasıdır. $z_{max} = e^{2+8-1-4} = e^5$ dir.

Yüzeyin en yüksek noktası $(1,-2,e^5)$ dir.

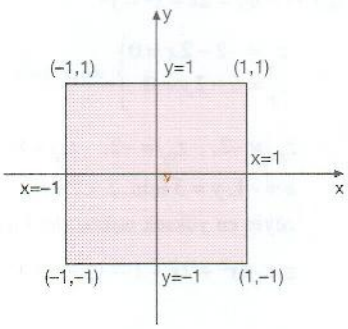
II. Çözüm:

$2x - 4y - x^2 - y^2 = -(x^2 - 2x + y^2 + 4y) = -[(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4] = 5 - (x-1)^2 - (y+2)^2$ olacağından $x = 1,\ y = -2$ için maksimum vardır. $z \le e^5$ olacağından $(1,-2,e^5)$ en yüksek noktadır.

4.

(a) $f(x,y) = x + 2y,\ B = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$

$f_x = 1 \neq 0,\ f_y = 2 \neq 0$ olduğundan yerel ekstremum yoktur. Çevre üzerindeki duruma bakalım.



$x = 1$ doğrusu üzerinde $f(x,y) = f(1,y) = 1 + 2y$ dir. $-1 \le y \le 1$ olacağından bu fonksiyonun en büyük değeri $f(1,y) = 1 + 2.1 = 3$, en küçük değeri $f(1,-1) = 1 + 2(-1) = -1$ dir.

$x = -1$ doğrusu üzerinde $f(x,y) = f(-1,y) = -1 + 2y$ olacağından fonksiyonun en büyü değeri $f(-1,1) = -1 + 2 = 1$, en küçük değeri $f(-1,-1) = -1 - 2 = -3$ tür.

$y = 1$ doğrusu üzerinde $f(x,y) = f(x,1) = x + 2,\ -1 \le x \le 1$ olacağından fonksiyonun alabileceği en büyük değer $f(1,1) = 1 + 2 = 3$, en küçük değer $f(-1,1) = -1 + 2 = 1$ olur.

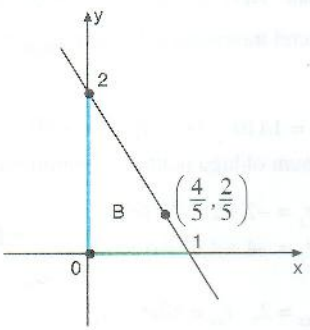
$y = -1$ doğrusu üzerinde $f(x,y) = f(x,-1) = x - 2$ olup alabileceği en büyük değer $f(1,-1) = 1 - 2 = -1$, en küçük değer $f(-1,-1) = -3$ tür. Bu değerleri bir tablo üzerine gösterelim. Görüldüğü gibi fonksiyon en küçük değerini $(-1,-1)$ de almaktadır. Bu en küçük değer -3 tür. Fonksiyonun almış olduğu en büyük değer 3 olup bu değeri $(1,1)$ noktasında almaktadır.

x	-1	1	1	-1
y	-1	-1	1	1
$f(x,y)$	-3	-1	3	1

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ B = \{(x,y) : x \ge 0,\ y \ge 0, y \le 2 - 2x\}$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y(x,y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ bir kritik noktadır. Şimdi çevre}$$

üzerindeki ekstrem noktaları araştıralım.



$y = 0$ doğrusu (x-ekseni) üzerinde $f(x,y) = f(x,0) = x^2$ olur.

$f(x,0) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$ kritik nokta.

$x = 0$ doğrusu (y-ekseni) üzerinde $f(x,y) = f(0,y) = y^2$ dir.

$f'(0,y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$ kritik noktadır.

$y = 2 - 2x$ doğrusu üzeride $f(x, 2-2x) = x^2 + (2-2x)^2$ olur.

$f'(x, 2-2x) = 2x - 4(2-2x) = 0 \Rightarrow 10x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow y = 2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5}$

bulunur. $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ bir kritik noktadır.

x	0	$\frac{4}{5}$	0	1
y	0	$\frac{2}{5}$	2	0
$f(x,y)$	0	$\frac{4}{5}$	4	1

Fonksiyonun üçgenin köşelerinde aldığı değerler $f(0,0)=0$, $f(1,0)=1$, $f(0,2)=4$ tür. Bu değerleri bir tabloda gösterelim.

$f(0,0)=0$, $f\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}$ dir.

Tablodan da görüldüğü gibi, fonksiyon en büyük değerini (0,2) noktasında alır. Bu en büyük değer 4 tür. En küçük değerini (0,0) alır. En küçük değer 0 dır.

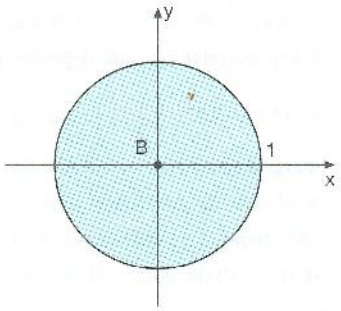
(c) $f(x,y)=2xy$, $B=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} f_x=2y=0\Rightarrow y=0 \\ f_y=2x=0\Rightarrow x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow (0,0) \text{ kritik nokta.}$$

Şimdi çevre üzerindeki yerel ekstremum noktalarını araştıralım. $y=\sqrt{1-x^2}$ üst yarı çemberde

$f(x,y)=f\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)=2x\sqrt{1-x^2}$

olur.



$$f'(x)=2\left(\sqrt{1-x^2}-x.\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=2\cdot\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0\ \Rightarrow\ 2x^2=1\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow$$

$y_1=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ birer kritik noktadır.

$y=-\sqrt{1-x^2}$ alt yarı çemberde

$f(x,y)=f\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)=-2x\sqrt{1-x^2}$ olur.

$$f'\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)=2\left(-\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)=2\cdot\frac{-1+2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$ bulunur.

$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ için $y=-\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$, $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ için $y_2=-\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ olur.

Buna göre $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ile $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de birer kritik noktadır.

$f(0,0)=0$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$,

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f(x,y)$	0	1	−1	−1	1

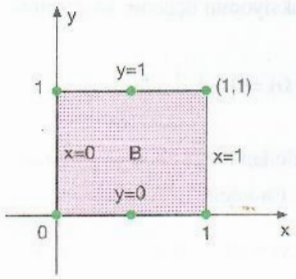
dir. Bunu tabloda gösterelim. Tablodan da görüldüğü gibi, fonksiyonun en büyük değeri 1 dir.

Fonksiyon bu değeri $\left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right)$ ve $\left(-\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/2\right)$ noktalarında alır. Fonksiyon en küçük değerini $\left(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right)$ ve $\left(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2\right)$ noktalarında alır. En küçük değer -1 dir.

(d) $f(x,y)=48xy-32x^3-24y^2$, $B=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} f_x=48y-96x^2=0\Rightarrow y=2x^2 \\ f_y=48x-48y=0\Rightarrow x=y \end{array}\right\}\Rightarrow x_1=0,\ y_1=0 \text{ ve } x_2=2,\ y_2=2$$

Kritik noktalar (0,0) ve (2,2) dir. $(2,2) \notin B$ olduğundan gözönüne alınmayacaktır. Şimdi çevre üzerindeki kritik noktaları araştıralım.



$y = 0$ doğrusu üzerinde $f(x,y) = f(x,0) = -32x^3 \Rightarrow f'(x,0) = -96x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ bulunur. O halde (0,0) bir kritik noktadır.

$x = 1$ doğrusu üzerinde

$f(1,y) = 48y - 32 - 24y^2 \Rightarrow f'(1,y) = 48 - 48y = 0 \Rightarrow y = 1$ bulunur.

O halde (1,1) bir kritik noktadır.

$y = 1$ doğrusu üzerinde $f(x,y) = f(x,1) = 48x - 32x^3$ olur.

$f'(x,1) = 48x - 96x^2 = 0 \Rightarrow 48x(1-2x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{1}{2}$ bulunur.

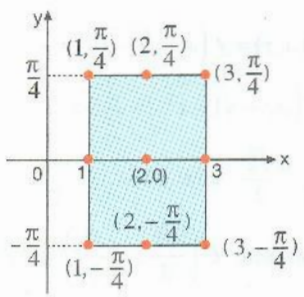
Buna göre (0,1) ve $\left(\frac{1}{2},1\right)$ noktaları da birer kritik noktadır.

$x = 0$ doğrusu üzerinde $f(x,y) = f(0,y) = -24y^2$ olur. Bu durumda $f'(0,y) = -48y = 0 \Rightarrow y = 0$ olur. (0,0) bir kritik noktadır. Fonksiyonun kritik noktalarda aldığı değerler $f(0,0) = 0, f(1,1) = 48 - 32 - 24 = 8$

$f(0,1) = -24$, $f\left(\frac{1}{2},1\right) = 24 - 4 - 24 = -4$ olur. (1,0) köşe noktasında aldığı değer $f(1,0) = -32$ dir. Bu değerleri bir tabloda gösterelim. Yandaki Tablodan da görüldüğü gibi, fonksiyonun alabileceği en büyük değer 8 olup bunu (1,1) noktasında almaktadır. Fonksiyonun alabileceği en küçük değer (1,0) da aldığı –24 sayısıdır.

x	0	1	0	1	1/2
y	0	1	1	0	1
$f(x,y)$	0	8	–24	–32	–4

(g) $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$, $\quad B = \{(x,y) : 1 \le x \le 3, -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\}$



$f_x = (4-2x)\cos y = 0 \Rightarrow 4 - 2x = 0 \; V \; \cos y = 0 \Rightarrow x = y = \pm\frac{\pi}{2} \notin B$

$f_y = -(4x - x^2)\sin y = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \; V \; \sin y = 0 \Rightarrow x = 0 \notin B$,

$x = 4 \notin B$, $y = 0$ olur. Şu halde kritik noktalar ya

$x = 2$ ve $y = 0$ doğruları üzerinde ya da çevre üzerindedir.

$f(x,0) = 4x - x^2 \Rightarrow f'(x,0) = 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ (2,0) bir kritik noktadır.

$f(2,y) = 4\cos y \Rightarrow f'(2,y) = -4\sin y = 0 \Rightarrow y = 0$ bulunur. Yine (2,0) noktası bulunur. $x = 1$ doğrusu üzerinde

$f(x,y) = f(1,y) = 2\cos y \Rightarrow f'(1,y) = -2\sin y = 0 \Rightarrow y = 0$ olur. Şu halde (1,0) bir kritik noktadır. $x = 3$ doğrusu üzerinde

$f(3,y) = 8\cos y \Rightarrow f'(3,y) = -8\sin y = 0 \Rightarrow y = 0$. (3,0) da bir kritik noktadır.

$y = -\frac{\pi}{4}$ doğrusu üzerinde $f(x,y) = f\left(x,-\pi/4\right) = \left(4x - x^2\right)\cos\left(-\pi/4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(4x - x^2\right)$ olur.

$f'\left(x,-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4-2x) = 0 \Rightarrow x = 2$ bulunur. O halde $\left(2,-\frac{\pi}{4}\right)$ de bir kritik noktadır. Benzer biçimde $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ noktasının da bir kritik nokta olduğu gösterilebilir. $x = 1$ doğrusu üzerinde $f(x,y) = f(1,y) = 3\cos y \Rightarrow f'(1,y) = -3\sin y = 0 \Rightarrow y = 0$ olur. Bu durumda (1,0) bir kritik noktadır. Benzer şekilde $x = 3$ doğrusu üzerinde (3,0) in de bir kritik nokta olduğu gösterilebilir. Fonksiyonun kritik ve köşe noktalarında aldığı değerleri tabloda gösterelim.

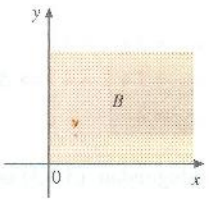
x	2	2	3	2	1	1	1	3	3
y	0	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x,y)$	4	$2\sqrt{2}$	3	$2\sqrt{2}$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Fonksiyonun mutlak maksimum noktası (2,0), mutluk minumum noktaları $\left(1,\frac{\pi}{4}\right),\left(1,-\frac{\pi}{4}\right),\left(3,-\frac{\pi}{4}\right),\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ noktalarıdır.

Mutlak maksimum değer 4; Mutlak minumum değer $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ dir.

5. $f(x,y)=xy+2x-\ln(x^2y)$, $B=\{(x,y): x>0,\ y>0\}$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= y+2-\frac{2xy}{x^2y}=0 \Rightarrow y+2-\frac{2}{x}=0 \\ f_y &= x-\frac{x^2}{x^2y}=0 \Rightarrow x-\frac{1}{y}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} xy+2x-2=0 \\ xy=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{2},\ y=2$$



$f_{xx}=\frac{2}{x^2}$, $f_{yy}=\frac{1}{y^2}$, $f_{xy}=1 \Rightarrow f_{xx}\left(\frac{1}{2},2\right) f_{yy}\left(\frac{1}{2},2\right)-f_{xy}^2\left(\frac{1}{2},2\right)=8\cdot\frac{1}{4}-1=1>0$ ve

$f_{xx}\left(\frac{1}{2},2\right)>0$ olduğundan $\left(\frac{1}{2},2\right)$ bir yerel minimum noktasıdır. $f_{min}=f\left(\frac{1}{2},2\right)=2+\ln 2$ dir.

6. İntegralin maksimum değerini alması için integrantın pozitif olması gerekir.

(a) $5-4x-x^2\geq 0$ olmalıdır. $5-4x-x^2=0 \Rightarrow x^2+4x-5=0 \Rightarrow (x-1)(x+5)=0 \Rightarrow x=1\ V\ x=-5$ bulunur.
O halde $-5\leq x\leq 1$ olmalıdır. Bu durumda $a=-5$, $b=1$ olmalıdır.

(b) $24-2x-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+2x-24\leq 0 \Rightarrow (x-4)(x+6)\leq 0 \Rightarrow -6\leq x\leq 4$ olmalıdır. $a=-6$, $b=4$ olmalıdır.

7. $(x,y,z)=\left(x,y,\frac{1}{xy}\right)$ noktasının orijine olan uzaklığı d olsun $d^2=x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}$ dir. Bu fonksiyonun minimumu bulunacaktır.

$$\left.\begin{aligned} 2dd_x &= 2x-\frac{2x}{x^4y^2}=0 \Rightarrow x-\frac{1}{x^3y^2}=0 \Rightarrow x^4y^2=1 \\ 2dd_y &= 2y-\frac{2y}{x^2y^4}=0 \Rightarrow y=\frac{1}{x^2y^3}=0 \Rightarrow x^2y^4=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow x=\pm y \text{ olmalıdır.}$$

$x^4y^2=1 \Rightarrow x^6=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow (-1,-1)\ (-1,1),(1,-1),(1,1)$ birer kritik noktadır.

Bu noktaların tümü için $d^2=1+1+1=3 \Rightarrow d=\sqrt{3}$ birim olur. Şu halde yukarıdaki dört nokta yüzeyin orijine en yakın noktalarıdır.

8. $f(x,y)=\ell^2=x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+xy-3x+9$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x+y-3=0 \\ f_y &= 2y+x=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=2 \text{ ve } y=-1 \text{ bulunur. Bu durumda } z^2=xy-3x+9=2(-1)-3.2+9=1 \Rightarrow z=\pm 1 \text{ olur.}$$

(2, –1, 1) ve (2, –1, –1) noktalarını inceleyelim. Bu iki nokta için

$f_{xx}=2$, $f_{yy}=2$, $f_{xy}=1 \Rightarrow \Delta(x,y)=2.2-1^2=3>0$ ve $f_{xx}>0$

olduğundan, bunlar orijine en yakın noktalardır. Bu noktaların orijine olan uzaklıkları $\ell=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$ birimdir.

9. $x.y.z = 343$ için $f(x,y,z) = x + y + z$ fonksiyonunun minimumu bulunacatır.

$g(x,y) = f\left(x,y,\frac{343}{xy}\right) = x+y+\frac{343}{xy}$ diyelim

$g_x = 1-\frac{343}{x^2y} = 0 \Rightarrow x^2y = 343,\quad g_y = 1-\frac{343}{xy^2} = 0 \Rightarrow xy^2 = 343 \Rightarrow \frac{xy^2}{yx^2} = \frac{343}{343} \Rightarrow$

$x = y \Rightarrow x^3 = 343 \Rightarrow x = 7$ *ve* $y = 7 \Rightarrow z = 7$ olur.

Fonksiyon en küçük değerini (7,7,7) noktasında alır. $x + y + z$ en az 21 olur.

10. $x + y + z = 9,\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,\ g(x,y) = f(x,y,9-x-y) = x^2 + y^2 + (9-x-y)^2$

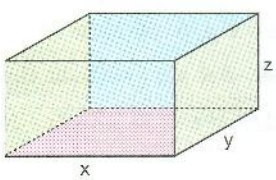
$\left.\begin{array}{l} g_x = 2x-2(9-x-y) = 0 \\ 9_y = 2y-2(9-x-y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow x = 9-2x \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow z = 3$

$\left.\begin{array}{l} g_{xx} = 2+2 = 4 \\ g_{yy} = 2+2 = 4 \\ g_{xy} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(x,y) = 4.4-2^2 = 12 > 0$ *ve* $g_{xx} = 4 > 0$

olduğundan (3,3,3) noktası f fonksiyonunu minumum yapan değerdir ve bu değer 27 dir.

11. $2(xy + yz + zx) = 600 \Rightarrow xy + yz + zx = 300 \Rightarrow z = \frac{300-xy}{x+y}$ olur.

Prizmanın hacmi $V = xyz = \frac{300xy-x^2y^2}{x+y}$ bulunur.



$V_x = \frac{(300y-2xy^2)(x+y)-1.(300xy-x^2y^2)}{(x+y)^2} = \frac{y(300y-2xy^2-x^2y)}{(x+y)^2}$

$V_y = \frac{x(300x-2x^2y-xy^2)}{(x+y)^2} = 0$ olur. $x > 0$ ve $y > 0$ olduğundan

$\left.\begin{array}{l} 300y-2xy^2-x^2y = 0 \\ 300x-2x^2y-xy^2 = 0 \end{array}\right\}$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa $(3000+xy)(y-x) = 0 \Rightarrow y-x = 0 \Rightarrow y = x$ olur.

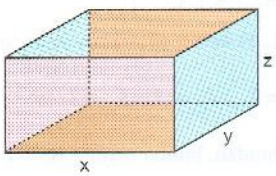
$3000x - 3x^3 = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$ bulunur. $z = \frac{300-100}{20} = 10$ olur. Bu durumda

$V = xyz = 10.10.10 = 1000\ cm^3$ olur.

Görüldüğü gibi, yüzey alanları sabit olan dikdörtgenler prizması içinde hacmi en büyük olanı küptür.

12. $x.y.z = 4$

$A(x,y,z) = xy + 2(xz + yz) = xy + 2z(x + y) = xy + \frac{8}{xy}(x+y) = xy + 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ olur.



$\left.\begin{array}{l} A_x = y-\frac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2y = 8 \\ A_y = x-\frac{8}{y^2} = 0 \Rightarrow xy^2 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2y = y^2x \Rightarrow y = x$ bulunur.

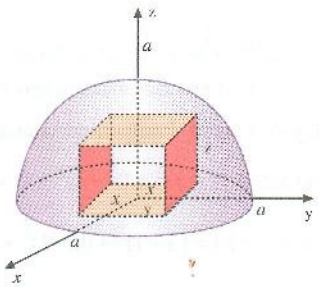
Bu değer $x^2y = 8$ denkleminde yerine yazılırsa $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$ bulunur. $y = x$ olduğundan $y = 2$ dir. $x.y.z = 4$ olduğundan $2.2.z = 4 \Rightarrow z = 1$ bulunur. Boyutları 2, 2, 1 olan prizma için kullanılacak sac $A = 2.2 + 8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 4 + 8 = 12\ m^2$ dir.

13. Prizmanın boyutları 2x, 2y, z olsun.

$V = 4xyz$ ve $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ dir. $V = 4.xy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ olacaktır.

$$V_x = 4\left[y\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right] = 0 \Rightarrow y\left(a^2 - 2x^2 - y^2\right) = 0$$

$$V_y = 4\left[x\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right] = 0 \Rightarrow x\left(a^2 - x^2 - 2y^2\right) = 0$$



bulunur. $x > 0$ ve $y > 0$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} a^2 - 2x^2 - y^2 &= 0 \\ a^2 - x^2 - 2y^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y$$

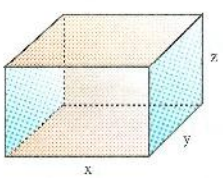
dir. Bu değer denklemlerden birinde yerine yazılırsa

$a^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{a}{\sqrt{3}}$ bulunur.

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ olacağından prizmanın hacmi $V = 4.\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}a^3$ tür.

14. $4x + 4y + 4z = 24 \Rightarrow x + y + z = 6 \Rightarrow V = xyz = xy\,(6 - x - y)$

$$\left.\begin{aligned} V_x &= y(6 - x - y) - xy = 0 \Rightarrow 6 - 2x - y = 0 \\ V_y &= x(6 - x - y) - xy = 0 \Rightarrow 6 - x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = 2$$



$z = 6 - x - y = 6 - 2 - 2 = 2$ olur. $V = 2.2.2 = 8\ cm^3$ bulunur.

15.

a) $h(x, y; \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(xy - 1)$.

$$\left.\begin{aligned} h_x(x, y; \lambda) &= 2x + \lambda y = 0 \\ h_y(x, y; \lambda) &= -2y + \lambda x = 0 \\ h_\lambda(x, y; \lambda) &= xy - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -\frac{2x}{\lambda}$$

$$\frac{2x}{\lambda} + \lambda x = 0 \Rightarrow x\left(2 + \lambda^2\right) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y = 0 \text{ bulunur.}$$

Bu değerler $xy - 1 = 0$ denklemini sağlamaz. Şu halde ekstremum noktaları yoktur.

b) $h(x,y,z;\lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ h_y &= -2 + 2\lambda y = 0 \\ h_z &= 2 + 2\lambda z = 0 \\ h_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2\lambda} \\ y &= -\frac{1}{\lambda} \\ z &= -\frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 9 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ için $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$ olur. $\lambda = -\frac{1}{2}$ için $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$ bulunur.

O halde ekstremum noktaları $(-1, 2, -2)$ ve $(1, -2, 2)$ dir.

16. (x,y,z) düzlem üzerinde herhangi bir nokta olsun. (1,1,1) noktasının bu noktaya olan uzaklığı $d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$ olacaktır. d nin minimum değeri bulunacaktır.

I. yol: Lagrange çarpanları yöntemi.

$g(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ fonksiyonun $x + 2y + 3z = 13$ yan şartı altındaki minimum değerini bulalım.

$$h(x,y,z;\lambda) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + \lambda(x + 2y + 3z - 13)$$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2(x-1) + \lambda = 0 \\ h_y &= 2(y-1) + 2\lambda = 0 \\ h_z &= 2(z-1) + 3\lambda = 0 \\ h_\lambda &= x + 2y + 3z - 13 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(2-\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{2} \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= 1 - \frac{3}{2}\lambda \\ 1 - \frac{\lambda}{2} + 2 - 2\lambda + 3 - \frac{9}{2}\lambda &= 13 \Rightarrow \lambda = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{3}{2} \\ y &= 2 \\ z &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$d^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ olur.}$$

II. yol: $d^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(\frac{13 - x - 2y}{3} - 1\right)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(\frac{10 - x - 2y}{3}\right)^2$ olur.

$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(\frac{10 - x - 2y}{3}\right)^2$ diyelim.

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2(x-1) + 2.\frac{10 - x - 2y}{3}.\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 10x + 2y = 19 \\ f_y &= 2(y-1) + 2\frac{10 - x - 2y}{3}.\left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 13y = 29 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{3}{2},\ y = 2$$

bulunur. $x + 2y + 3z = 13 \Rightarrow \frac{3}{2} + 4 + 3z = 13 \Rightarrow z = \frac{5}{2}$ olur. $d = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + (2-1)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ bulunur.

17. $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $z = xy + 1 \Rightarrow d^2 = x^2 + y^2 + (xy + 1)^2$

$f(x, y) = x^2 + y^2 + (xy + 1)^2$ fonksiyonunun minimumu bulunacaktır.

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x + 2(xy+1)y = 0 \\ f_y &= 2y + 2(xy+1)x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + (xy+1)y &= 0 \\ y + (xy+1)x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x - y + (xy+1)(y-x) = 0 \Rightarrow (x-y)(xy + 1 - 1) \Rightarrow$$

$(x - y)\,xy = 0 \Rightarrow x = y$, $x = 0$, $y = 0$ olur. (0,0) bir kritik noktadır. x = y için inceleyelim.

$x + (xy + 1)y = 0 \Rightarrow x + (x^2 + 1)x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ olur. Şu halde kiritik nokta sadece (0,0) dır. $x = y = 0$ için $z = xy + 1 = 0.0 + 1 = 1$ olacağından, yüzey üzerinde orijine en yakın nokta (0,0,1) noktasıdır.

18. $h(x,y,z,\lambda) = x+2y+3z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-25\right)$

$$\left.\begin{array}{l} h_x = 1+2\lambda x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ h_y = 2+2\lambda y = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{\lambda} \\ h_z = 3+2\lambda z = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{3}{2\lambda} \\ h_\lambda = x^2+y^2+z^2-25 = 0 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{4\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda^2}+\dfrac{9}{4\lambda^2} = 25 \\ \dfrac{14}{4\lambda^2} = 25 \Rightarrow \lambda^2 = \dfrac{14}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{14}}{10}$$

$\lambda = \dfrac{\sqrt{14}}{10}$ *için* $x = -\dfrac{1}{\frac{\sqrt{14}}{5}} = \dfrac{-5}{\sqrt{14}}$, $y = -\dfrac{10}{\sqrt{14}}$, $z = -\dfrac{15}{\sqrt{14}}$ bulunur.

$f\left(-\dfrac{5}{\sqrt{14}},-\dfrac{10}{\sqrt{14}},-\dfrac{15}{\sqrt{14}}\right) = -\dfrac{5}{\sqrt{14}}-\dfrac{20}{\sqrt{14}}-\dfrac{45}{\sqrt{14}} = -\dfrac{70}{\sqrt{14}} = -5\sqrt{14}$ fonksiyonun alaileceği en küçük değerdir.

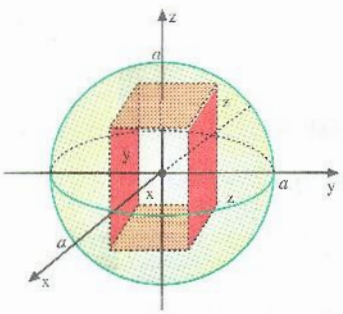
$\lambda = -\dfrac{\sqrt{14}}{10}$ için $x = \dfrac{5}{\sqrt{14}}$, $y = \dfrac{10}{\sqrt{14}}$, $z = \dfrac{15}{\sqrt{14}}$ olup $f\left(\dfrac{5}{\sqrt{14}},\dfrac{10}{\sqrt{14}},\dfrac{15}{\sqrt{14}}\right) = 5\sqrt{14}$ bulunur.

Bu da fonksiyonun alabileceği en büyük değerdir.

19. $V = 2x.2y.2z = 8.xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$V_x = 8y\sqrt{a^2-x^2-y^2} - \frac{8.x^2y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 0 \Rightarrow a^2-2x^2-y^2 = 0,$$

$$V_y = 8x\sqrt{a^2-x^2-y^2} - \frac{8.xy^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 0 \Rightarrow a^2-x^2-2y^2 = 0.$$



Birinci denklemden ikincisi çıkarılırsa

$-x^2+y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ bulunur.

$a^2-2x^2-y^2 = 0 \Rightarrow a^2-2x^2-x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = a^2 \Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ bulunur.

$z = \sqrt{a^2+x^2-y^2} = \sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ alacağından, maksimum hacim $V = 8xyz = 8.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{8a^3}{3\sqrt{3}}$ bulunur.

Görüldüğü gibi, bir küre içine çizilen maksimum hacimli dikdörtgenler prizması bir küptür.

20. $h(x,y,z;\lambda) = x+z+\lambda\,(x^2+y^2+z^2-1)$

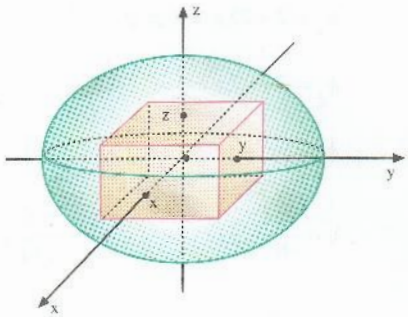
$$\left.\begin{array}{l} h_x = 1+2\lambda x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ h_y = 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ h_z = 1+2\lambda z = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ h_\lambda = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\lambda^2}+0+\frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{bulunur.}$$

$\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ için $x = z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ve dolayısıyla $x+z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ olur.

$\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ için $x = z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dir. Bu durumda $x+z = -\sqrt{2}$ dir. Şu halde x + z en fazla $\sqrt{2}$, en az $-\sqrt{2}$ dir.

21. Prizmanın boyutları $2x$, $2y$, $2z$ dir.

$V = 8xyz$ ve $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$ dir.



$$h(x,y,z,\lambda) = 8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}-1\right)$$

$$h_x = 8yz+\frac{2\lambda x}{9}=0 \Rightarrow 8xyz=\frac{2\lambda x^2}{9}$$

$$h_y = 8xz+\frac{2\lambda y}{16}=0 \Rightarrow 8xyz=\frac{2\lambda y^2}{16}$$

$$h_z = 8xy+\frac{2\lambda z}{36}=0 \Rightarrow 8xyz=\frac{2\lambda z^2}{36}$$

$$h_\lambda = \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}-1=0$$

bulunur. İlk üç eşitlikten $\frac{x^2}{9}=\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{36}$ bulunur.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1 \Rightarrow 3.\frac{x^2}{9}=3.\frac{y^2}{16}=3.\frac{z^2}{36}=1 \Rightarrow x=\sqrt{3},\ y=\frac{4}{\sqrt{3}},\ z=2\sqrt{3}$$

$V = 8xyz = 8.\sqrt{3}.\frac{4}{\sqrt{3}}.2\sqrt{3} = 64\sqrt{3}\ br^3$ olur.

22. **I. yol:** $h(x,y,z;\lambda,\gamma) = x^2+2y-z^2+\lambda(2x-y)+\gamma(y+z)$

$h_x = 2x+2\lambda=0 \Rightarrow x=-\lambda$

$$\left.\begin{array}{l} h_y = 2-\lambda+\gamma=0 \longrightarrow \lambda-\gamma=2 \\ h_z = -2z+\gamma=0 \Rightarrow z=\frac{\gamma}{2} \quad -2x+\frac{\gamma}{2}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3},\ \gamma=-\frac{8}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_\lambda = 2x-y=0 \\ h_\gamma = y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+z=0 \Rightarrow -2\lambda+\frac{\gamma}{2}=0$$

bulunur. Buna göre $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{3}$, $z=-\frac{4}{3}$ olur.

$f\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{9}+\frac{8}{3}-\frac{16}{9}=\frac{4}{3}$ bulunur.

II. yol: $x^2+2y-z^2 = x^2+4x-(-y)^2 = x^2+4x-4x^2 = 4x-3x^2$ olur.

$g(x) = 4x-3x^2$ nin en büyük değereni bulalım.

$g'(x) = 4-6x=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ olur. $2x-y=0 \Rightarrow y=2x \Rightarrow y=\frac{4}{3}$ ve $z=-y=\frac{4}{3}$ bulunur.

Bu durumda $x^2+2y-z^2=\frac{4}{9}+\frac{8}{3}-\frac{16}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ olur.

23. Önce arakesit doğrusunun denklemini bulalım. $z = t$ denirse

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= 3t+1 \\ x+3y &= 4t+2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = t-1, \quad y = t+1 \text{ bulunur. O halde arakesitin denklemi } \begin{cases} x = t-1 \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases} \text{ olacaktır. Bu durumda}$$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = (t-1)^2 + (t+1)^2 + t^2 = 3t^2 + 2$ olur.

$f'(t) = 6t = 0 \Rightarrow t = 0$ için f minimum olur. $t = 0$ için $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$ olacağından, orijine en yakın nokta $(-1,1,0)$ olup bunun orijine uzaklığı $d = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$ birimdir.

Not: Bu roblem iki yan şartı bulunan bir problem olarak da çözülebilir.

24. $h(x,y,z;\lambda,\gamma) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 1) + \gamma(x^2 + y^2 - 1)$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2x+\lambda+2\gamma = 0 \Rightarrow x = -\frac{\lambda}{2(\gamma+1)} \\ h_y &= 2y+\lambda+2\gamma y = 0 \Rightarrow = -\frac{\lambda}{2(\gamma+1)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y \text{ bulunur.}$$

$x^2 + y^2 = 1$ olduğundan $x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, bulunur.

$x + y + z = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + z = 1 \Rightarrow z = 1 - \sqrt{2}$ ve $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + z = 1 \Rightarrow z = 1 + \sqrt{2}$ olur.

Şu halde istenen noktalar $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$ ve $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$ noktalarıdır.

$|OA| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$, $|OB| = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ olacağından elips üzerinde orijine en yakın nokta B, en uzak nokta A dır.

byns

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $z = \sqrt{y} + f\left(\sqrt{x} - 1\right)$ fonksiyonu veriliyor.

$y = 1$ için $z = x$ olduğuna göre f fonksiyonunu bulunuz.

2. Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgelerini bulup grafiğini çiziniz.

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

(b) $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}$

4. $u = \dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)/4t}$

fonksiyonunun $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ denklemini sağladığını gösteriniz.

5. F iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x - az,\ y - bz) = 0$$

bağıntısıyla tanımlanan $z = z(x, y)$ fonksiyonunun

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

6. $z_{yy} = az_{xx}$ denklemini

$$u = x - ay$$
$$v = x + ay$$

biçiminde verilen yeni u, v değişkenlerine göre yazınız.

7. $z_{xx} + z_{yy} = 0$ Laplaca denklemini

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

kutupsal koordinatlarına göre yazınız.

8. Aşağıdaki fonksiyonların yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

(b) $f(x, y) = x^4 - y^4 + 3x^2y^2$

(c) $f(x, y) = [x^2 + (y + 2)^2]\,[x^2 + (y - 1)^2]$

9. Diferensiyellenebilir f ve g fonksiyonları için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

(b) $\nabla(cf) = c\nabla f$

(c) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(d) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$ $\qquad (g \neq 0)$

10. $u = F(x, y)$, $x = e^s\cos t$, $y = e^s\sin t$ için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

11. $ax^2 + by^2 + cz^2 = k$ denklemiyle verilen bir ikinci dereceden yüzeyin (kuadratik yüzeyin) üzerindeki bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denkleminin

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = k$$

şeklinde olacağını gösteriniz.

12. $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^4}{c^2}$ küresi ile $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ konisinin birbirine $A(0,b,c)$ ve $B(0,-b,c)$ noktalarında teğet olduklarını gösteriniz. [*YG:* Her iki yüzeyin verilen noktadaki teğet düzlemlerinin aynı olacağını, dolayısıyla o noktadaki gradiyent vektörlerinin paralel olacağını görünüz.].

13. İki yüzeyin bir ortak noktasındaki teğet düzlemler arasındaki açıya o iki yüzeyin arasındaki açı denir. $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi ile $x^2 + y^2 = a^2$ silindiri $M\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ noktasında hangi açı altında kesişir?

14. f, türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyinin, $x_0 \neq 0$ olmak üzere, her $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki teğetinin orijinden geçtiğini gösteriniz.

15. $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin her noktasındaki teğet düzleminin orijinden geçtiğini gösteriniz.

16. $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunun $(1, 1, 1)$ noktasındaki en büyük yönlü türevini bulunuz.

17. $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunun,

$r(t) = (cos3t)\,i + (sin3t)\,j + 3t\,k$ helisinin $t = \frac{\pi}{3}$ noktasındaki hız vektörü yönündeki türevini hesaplayınız.

18. $xy + yz + zx - x - z^2 = 0$ yüzeyinin hangi noktadaki teğet düzlemi xOy düzlemine paralel olur?

19. Bir dikdörtgenler prizmasının üç yüzeyi koordinat düzlemlerinde bulunmaktadır. Koordinat düzlemlerinde bulunmayan köşe $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ düzlemi üzerinde bulunduğuna göre bu prizmanın hacmi en fazla ne olabilir?

20. Aşağıda verilen fonksiyonları karşılarında yazılı noktalarda lineerleştiriniz.

(a) $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$, $P(1, 0)$

(b) $f(x, y, z) = ?\ cos\ x\ sin\ (y + z)$ $P(0, 0, \frac{\pi}{4})$

21. (x, y, z) noktaları $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ küresi üzerinde alınmak üzere $f(x,y,z) = x^2\,y^2\,z^2$ fonksiyonunun maksimum değerinin $\left(\frac{r^2}{3}\right)^3$ olacağını gösteriniz.

Bundan yararlanarak, pozitif a, b, c sayıları için

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

22. $x = \rho\ sin\theta\ cos\varphi$

$y = \rho\ sin\theta\ sin\varphi$ dönüşümü için

$z = \rho\ cos\theta$

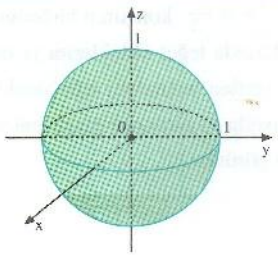
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}$$

Jakobiyenini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

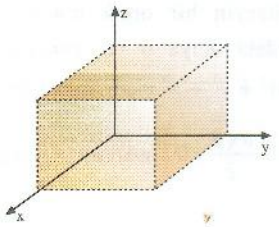
1. $x = \sqrt{1} + f\left(\sqrt{x}-1\right) \Rightarrow x-1 = f\left(\sqrt{x}-1\right)$ olur. $\sqrt{x-1} = t$ denirse

$(t+1)^2 - 1 = f(t) \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t$ bulunur.



2. (a) $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ bulunur. Bu bölge birim küre ve iç bölgesidir.

(b) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ olmalıdır. Bu üç boyutlu uzayda birinci bölgedir.



3. (a) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ koyalım.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r\sin\varphi . r\cos\varphi}{r^2} = \sin\varphi\cos\varphi$$

bulunur. Şu halde yaklaşım açısına göre limitin sonucu değişir. Dolayısıyla limit yoktur.

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r} = \lim_{r\to 0} r\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

O halde limit vardır ve sıfırdır.

(c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r^2} = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$$

olduğundan limit yoktur, zira her açı için sonuç değişir.

(d) $y = x^2$ eğrisi boyuncu (0, 0) noktasına yaklaşım:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \text{ dır.}$$

O halde (0,0) noktasında limit yoktur.

4. $$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x^2+y^2+z^2)/4t} \Rightarrow u_x = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} \left(-\frac{x}{2t}\right)$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{2t\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{x^2}{4t^2} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

olur. Benzer şekilde

$$u_{yy} = -\frac{1}{2t\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{y^2}{4t^2} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

$$u_{zz} = -\frac{1}{2t\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + \frac{z^2}{4t^2}\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2}-\frac{3}{2t}\right) \quad \text{olur.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{3}{2\left(2\sqrt{\pi}\right)^3} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}} + e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2}\right)\frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2}-\frac{3}{2t}\right) \quad \text{olduğundan} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{dır.}$$

5. $u = x - az \qquad v = y - bz$ olsun.

$$F(u,v)=0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \text{olur. Buradan}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(1-a.z_x\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(-bz_x\right)=0 \Rightarrow z_x = \frac{F_u}{aF_u+bF_v} \quad \text{ve}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(1-az_y\right)+\frac{\partial F}{\partial v}.\left(1-bz_y\right)=0 \Rightarrow z_y = \frac{F_v}{aF_u+bF_v} \quad \text{olur. Bu durumda}$$

$$az_x+bz_y = \frac{aF_u+bF_v}{aF_u+bF_v}=1 \quad \text{bulunur.}$$

6.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}(-a)+\frac{\partial z}{\partial v}(a) = -a\frac{\partial z}{\partial u}+a\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{dx} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(a\left[\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\right]\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(a\left[\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\right]\right)\frac{\partial v}{\partial y} = \left(a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)(-a)+\left(a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\right)a$$

$$= a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{a^2\partial^2 z}{\partial v\partial u} \quad \text{bulunur. Buradan} \quad z_{yy}=a^2 z_{xx} \quad \text{denklemi}$$

$$a^2 z_{uu}-a^2 z_{vu}+a^2 z_{vv}-a^2 z_{uv} = a^2 z_{uu}+a^2 z_{vu}+a^2 z_{uv}+a^2 z_{vu} \Rightarrow z_{uv}=0$$

biçimini alır.

7. $x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta$

Yukarıdaki denklemlerin x ve y ye göre türevleri alınırsa

$$\left.\begin{aligned} 1 &= r_x\cos\theta - r\sin\theta\,\theta_x \\ 0 &= r_x\sin\theta + r\cos\theta\,\theta_x \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 0 &= \cos\theta\, r_y - r\sin\theta\,\theta_y \\ 1 &= \sin\theta\, r_y + r\cos\theta\,\theta_y \end{aligned}\right\}$$

eşitlikleri bulunur. Bu sistemlerden $r_x, \theta_x, r_y, \theta_y$ hesaplanırsa

$$r_x = \cos\theta, \quad \theta_x = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad r_y = \sin\theta, \quad \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}$$

bulunur. Bu durumda

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\quad \text{olur.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$=\left(\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right)\cos\theta+\left(-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right).\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$=\left(\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta+\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{d^2 u}{d\theta^2}\quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\quad \text{bulunur.}$$

8. (a) $f(x,y)=x^3+y^3-9xy+27$

$$\left.\begin{aligned} f_x&=3x^2-9y=0\ \Rightarrow\ 3y=x^2\\ f_y&=3y^2-9x=0\ \Rightarrow\ 3x=y^2\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ 3x=\frac{x^4}{9}\ \Rightarrow\ x\left(x^3-27\right)=0\ \Rightarrow\ x_1=0, x_2=3\Rightarrow y_1=0,\quad y_2=3$$

(0,0) ve (3,3) kritik noktalardır.

$f_{xx}=6x,\quad f_{yy}=6y,\quad f_{xy}=-9\ \Rightarrow\ \Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=36xy-81$. (0,0) noktasında $\Delta=-81<0$ olduğundan (0,0) bir eyer noktasıdır. (3,3) noktasında $\Delta=36.3.3-81>0$ ve $f_{xx}=6.3=18>0$ olacağından (3,3) noktası bir yerel minimum noktasıdır. $z_{min}=3^3+3^3-9.3.3+27=0$ dır.

(b) $f(x,y)=x^4-y^4+3x^2y^2$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y)&=4x^3+6xy^2=0\ \Rightarrow\ 2x\left(2x^2+3y^2\right)=0\ \Rightarrow\ x=0\ \ ve\ \ y=0\\ f_y(x,y)&=-4y^3+6x^2y=0\ \Rightarrow\ 2y\left(3x^2-2y^2\right)=0\ \Rightarrow\ y=0\ \vee\ 3x^2-2y^2=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=y=0.$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy}(x,y)&=4x^3+6xy^2\ \Rightarrow\ f_{xx}(0,0)=0\\ f_{yy}(x,y)&=-12y^2+6x^2\Rightarrow f_{yy}(0,0)=0\\ f_{xy}(x,y)&=12xy\Rightarrow f_{xy}(0,0)=0\end{aligned}\right\}\ f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0\ \Rightarrow\ \text{şüpheli durum var.}$$

$f(0,0)=0$ dır. Her $\varepsilon>0$ için $f(0,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon^4}<f(0,0)$ ve $f(\varepsilon,0)=\frac{1}{\varepsilon^4}>f(0,0)$

olduğundan (0,0) noktası bir eyer noktasıdır.

(c) $f(x, y) = [x^2 + (y + 1)^2]\,[x^2 + (y - 1)^2]$

$f_x = 2x\,[x^2 + (y - 1)^2] + 2x\,[x^2 + (y + 1)^2] = 4x\,[x^2 + y^2 + 1] = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_y = 2(y + 1)[x^2 + (y - 1)^2] + 2(y - 1)\,[x^2 + (y + 1)^2]$

$= 2y\,[x^2 + (y - 1)^2 + x^2 + (y + 1)^2] + 2\,[x^2 + (y - 1)^2 - x^2 - (y + 1)^2]$

$= 4y\,(x^2 + y^2 + 1) + 2(-4y) = 4y(x^2 + y^2 - 2) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x^2 + y^2 - 2 = 0$

$x^2 + y^2 = 2$ da $x = 0$ yazılırsa $y = \pm\sqrt{2}$ bulunur. O halde kritik noktalar $A(0,0)$, $B(0,\sqrt{2})$, $C(0,-\sqrt{2})$ dir.

$f_{xx} = 4(x^2 + y^2 + 1) + 8x^2 = 12x^2 + 4y^2 + 4$

$f_{yy} = 4(x^2 + y^2 - 2) + 8y^2 = 4x^2 + 12y^2 - 8$

$f_{xy} = 8xy$

$A(0,0)$ noktasında $f_{xx} = 4$, $f_{yy} = -8$, $f_{xy} = 0$ olacağından $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = -32 < 0$ dır. Dolayısıyla (0,0) bir eyer noktasıdır. $B(0, \sqrt{2})$ noktasında $f_{xx} = 4.2 + 4 = 20$, $f_{yy} = 12.2 = 24$ ve $f_{xy} = 0$ olacağından $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 480 > 0$ dır. Ayrıca $f_{xx} > 0$ olduğundan $B(0,\sqrt{2})$ bir yerel minimum noktasıdır. $z_{min} = f(0,\sqrt{2}) = -4$ tür. $C(0,-\sqrt{2})$ noktasında $f_{xx} = 20$, f_{yy} 24 ve $f_{xy} = 0$ olduğundan $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 480 > 0$ ve $f_{xx} = 20 > 0$ dır. Dolayısıyla $C(0,-\sqrt{2})$ de bir yerel minimum noktasıdır.

$z_{min} = f(0,-\sqrt{2}) = -4$ tür.

9. (a) $\nabla(f+g) = \dfrac{\partial(f+g)}{\partial x} i + \dfrac{\partial(f+g)}{\partial y} i + \dfrac{\partial(f+g)}{\partial z} k$

$= \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\right) i + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\right) j + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\right) k$

$= \dfrac{\partial f}{\partial x} i + \dfrac{\partial f}{\partial y} j + \dfrac{\partial f}{\partial z} k + \dfrac{\partial g}{\partial x} i + \dfrac{\partial g}{\partial y} j + \dfrac{\partial g}{\partial z} k = \nabla f + \nabla g$

(b) $\nabla(cf) = \dfrac{\partial(cf)}{\partial x} i + \dfrac{\partial(cf)}{\partial y} j + \dfrac{\partial cf}{\partial z} k = c.\dfrac{\partial f}{\partial x} i + c\dfrac{\partial f}{\partial y} j + c\dfrac{\partial f}{\partial z} k = c\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} i + \dfrac{\partial f}{\partial y} j + \dfrac{\partial fk}{\partial z} k\right) = c\nabla f.$

(c) $\nabla(f.g) = \dfrac{\partial(f.g)}{\partial x} i + \dfrac{\partial(fg)}{\partial y} j + \dfrac{\partial(fg)}{\partial z} k = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}.g + f.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right) i + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}.g + f.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right) j + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}.g + f.\dfrac{\partial g}{\partial z}\right) k$

$= g\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} i + \dfrac{\partial f}{\partial y} j + \dfrac{\partial f}{\partial z} k\right) + f.\left(\dfrac{\partial g}{\partial x} i + \dfrac{\partial g}{\partial y} j + \dfrac{\partial g}{\partial z} k\right) = g\nabla f + f\nabla g$

(d) Yukarıdakilere benzer şekilde hesaplanır.

10. $u = f(x, y)$, $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + e^s \sin t \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{2s} \cos^2 t + e^s \sin t \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{2s} \sin^2 t + 2e^{2s} \sin t \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -e^s \sin t \frac{\partial u}{\partial x} + e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^s \cos t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{2s} \sin^2 t - e^s \sin^2 t \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{2s} \cos^2 t - 2e^{2s} \sin t \cos t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{2s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + e^{2s}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = e^{2s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

11. $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - k$ diyelim. $ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = k$ dir.

$$f_x = 2ax \Rightarrow f_x(x_0, y_0, z_0) = 2ax_0$$

$$f_y = 2by \Rightarrow f_y(x_0, y_0, z_0) = 2by_0$$

$$f_z = 2cz \Rightarrow f_z(x_0, y_0, z_0) = 2cz_0$$

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$2ax_0(x - x_0) + 2ay_0(y - y_0) + 2cz_0(z - z_0) = 0 \Rightarrow ax_0x - ax_0^2 + by_0y - by_0^2 + cz_0z - cz_0^2 = 0$$

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 \Rightarrow ax_0x + by_0y + cz_0z = k$$

12. $f(x,y,z) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$

$$\nabla f = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right) = \left(-\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{-2z}{c^2}\right) \Rightarrow \nabla f(0,b,c) = \left(0, \frac{2}{b}, -\frac{2}{c}\right)$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right) - \frac{b^4}{c^2} = 0$$

$$\nabla g = \left(\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}, \frac{dg}{dz}\right) = \left(2x, 2y, 2\left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)\right) \Rightarrow \nabla g(0, b, c) = \left(0, 2b, \frac{-2b^2}{c}\right)$$

olacağından $\nabla g(A) = b^2 \nabla f(A)$ dir. O halde her iki yüzeyin A noktasındaki gradiyent vektörleri paraleldir. Aynı şeyler B noktası için de geçerlidir.

13. İki yüzeyin gradiyent vektörleri arasındaki açıya bakalım.

$f(x,y,z) = (x - a)^2 + y^2 + z^2 - a^2$

$$\nabla f = (2(x - a), 2y, 2z) \Rightarrow \nabla f|_M = \left(a, a\sqrt{3}, 0\right)$$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - a^2 \Rightarrow \nabla g = (2x, 2y, 0) \Rightarrow \nabla g\,|_M = \left(a, a\sqrt{3}, 0\right)$

Gradiyent vektörleri birbirlerine paralel ve aynı yönlü olduğundan aradaki açının ölçüsü sıfırdır.

14. $g(x,y,z) = xf\left(\frac{y}{x}\right) - z, \quad g_x = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right), \quad g_y = f'\left(\frac{y}{x}\right), \quad g_z = -1$

$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right)(x - x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ (Teğet düzlemi denklemi)

$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right]x + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y - z = x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$ olur.

$z_0 = x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$ olduğundan, teğet düzlemin denklemi

$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\right]x + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y - z = 0$

olur. (0,0,0) noktası bu denklemi sağlar. Dolayısıyla teğet düzlem orijinden geçer.

15. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \Rightarrow f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad f_z = -2z$

olduğundan herhangi bir (x_0, y_0, z_0) noktasındaki teğet düzlemin denklemi;

$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z0) = 0 \Rightarrow 2x_0x + 2y_0y + 2z_0z = 2x_0^2 + 2y_0^2 - 2z_0^2 - 2z_0^2 \Rightarrow x_0x + y_0y - z_0z = 0$

olur ki bu düzlem $O(0, 0, 0)$ noktasından geçer.

16. u yönündeki en büyük türev $\|\nabla f\|$ dir. Buna göre $\nabla f = (yz, xz, xy)$ olacağından $\nabla f(1,1,1) = (1,1,1)$ olur.

Dolayısıyla $\|\nabla f(1,1,1)\| = \sqrt{3}$ tür.

17. $r\left(\frac{\pi}{3}\right) = (-1,0,\pi)$ olduğundan türev alınacak nokta $(-1, 0, \pi)$ dir.

$\nabla f(yz, xz, xy), \quad v(t) = r'(t) = (-3\sin 3t)\,i + (3\cos 3t)\,j + 3\,k \Rightarrow v\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3j + 3k = (0,-3,3)$ olur.

v ile aynı yönlü birim vektör $u = \frac{v}{\|v\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ olacağından istenen türev

$D_u f = 0.(-1) + 0.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ dir.

18. $F_x.(x - x_0) + F_y.(y - y_0) + F_z.(z - z_0) = 0$ düzleminin xOy düzlemine paralel olması için x in ve y nin katsayıları sıfır olmalıdır. [Bu tip denklemlerin $z = c$ biçiminde olduklarını hatırlayınız.]

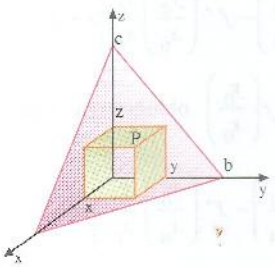
$F_x = 0$ ve $F_y = 0$ olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned} F_x &= y + z - 1 = 0 \\ F_y &= x + z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -z + 1 \text{ ve } x = -z \text{ olacaktır.}$$

$xy + yz + zx - x - z^2 = 0 \Rightarrow (-z)(-z+1) + (-z+1)z + (-z).z + z - z^2 = 0 \Rightarrow -2z^2 + z = 0 \Rightarrow z_1 = 0,\ z_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_1 = 0,\ y_1 = 1$ ve $x_2 = -\frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{2}$ bulunur. İstenen noktalar (0,0,0) ve $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktalarıdır.

19. Prizmanın düzlem üzerindeki köşesi P(x,y,z) olsun.



$V = xyz = cxy\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$,

$V_x = cy\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) - \frac{c}{a}xy = 0 \Rightarrow \frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$

$V_y = cx\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) - \frac{cxy}{b} = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 1.$

Son iki denklemin oluşturduğu sistem çözülürse $x = \frac{a}{3},\ y = \frac{b}{3}$ bulunur.

Bu durumda $V = c.\frac{a}{3}.\frac{b}{3}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{abc}{27}$ birim küp olur.

19. (a) $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$

$L(x, y, z) = f(a, b, c) + f_x(a, b, c).(x - a) + f_z(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$

$f(1, 1, 0) = 1,\quad f_x(x, y, z) = y - 3z \Rightarrow f_x(1, 1, 0) = 1$

$f_y(x, y, z) = x + 2z \Rightarrow f_y(1,1,0) = 1,\quad f_z(x, y, z) = 2y - 3x \Rightarrow f_z(1, 1, 0) = -1$

$L(x, y, z) = 1 + 1(x - 1) + 1(y - 1) - 1(z - 0) = x + z - y - 1$

(b) $f(x,y,z) = \sqrt{2}\cos x\sin(y+z) \Rightarrow f\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.1.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$f_x(x,y,z) = -\sqrt{2}\sin x\sin(y+z) \Rightarrow f_x\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.0 = 0$

$f_y(x,y,z) = \sqrt{2}\cos x\cos(y+z) \Rightarrow f_y\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.1.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$f_z(x,y,z) = \sqrt{2}\cos x\cos(y+z) \Rightarrow f_z\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

$L(x,y,z) = 1 + 0(x-0) + 1(y-0) + 1.\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = y + z + 1 - \frac{\pi}{4}.$

21. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2,\quad x^2 + y^2 + z - r^2 = 0.$

$h(x, y, z; \lambda) = x^2y^2z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$

$$\left.\begin{aligned} h_x &= 2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow 2x\left(y^2z^2 + \lambda\right) = 0 \\ h_y &= 2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow 2y\left(x^2z^2 + \lambda\right) = 0 \\ h_z &= 2x^2y^2z + 2\lambda z = 0 \Rightarrow 2z\left(x^2y^2 + \lambda\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2$$

$$h_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = \frac{r^2}{3}$$

$f_{\max} = \frac{r^2}{3}.\frac{r^2}{3}.\frac{r^2}{3} = \left(\frac{r^2}{3}\right)^3$ olur. Bu durumda $f(x,y,z) \le \left(\frac{r^2}{3}\right)^3 \Rightarrow x^2y^2z^2 \le \left(\frac{r^2}{3}\right)^3$

olur. $x^2 = a$, $y^2 = b$, $z^2 = c$ denirse $a + b + c = r^2$ bulunur. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlik

$$a.b.c \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{a.b.c} \le \frac{a+b+c}{3}$$

biçimini alır.

22. $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Bu determinant açıldığında

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\theta$$

bulunur.

byns

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

14 ÇOK KATLI İNTEGRALLER

İKİ KATLI İNTEGRALLER

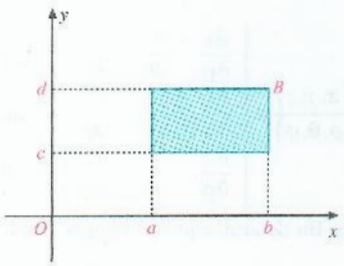
İKİ KATLI İNTEGRALLER VE İKİ KATLI İNTEGRALLERDE BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

TEOREM (Birinci Fubini Teoremi)

$B = \{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d$ ve $f : B \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

dir.



TEOREM (İkinci Fubini Teoremi)

$\varphi, \psi : [a, b] \to R$ fonksiyonları sürekli, $\forall x \in [a, b]$ için

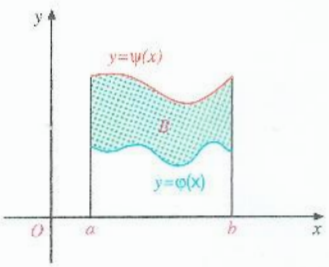
$\varphi(x) \le \psi_{(x)}$ ve

$B = \{ (x, y) :\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \}$ olsun.

$f : B \to R$ fonksiyonu sürekli veya parçalı sürekli ise

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

olur.



TEOREM

$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$ dönüşümünün jakobiyeni $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$

olmak üzere

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f\big(g(u,v)\,h(u,v)\big)\,|J|\,du\,dv$$

dir.

byns

PROBLEMLER

- İki Katlı İntegraller
- İki Katlı İntegrallerde Bölge Dönüşümleri

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int_0^1 \int_2^4 x^2 y \, dy \, dx = 2$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} \, dy \, dx = \frac{\pi}{12}$

(c) $\int_0^1 \int_0^x (3-x-y) \, dy \, dx = 1$

(d) $\int_0^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} \, dy \, dx = \frac{9}{4}$

(e) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y \, dy \, dx = \frac{\pi}{4}$

(f) $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy \, dx = 1$

2. Aşağıdaki verilen fonksiyonların, altlarında yazılı bölgeler üzerindeki integrallerini hesaplayınız.

(a) $f(x, y) = x + y$,

$B = \{ (x, y) : 0 \le y \le x, \ 0 \le x \le 1 \}$

(b) $f(x, y) = 4 - x - y$,

$B = \{ (x, y) : 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \ge 2 \}$

(c) $f(x, y) = y - \sqrt{x}$,

$B = \{ (x, y) : 0 \le y \le 1 - x, \ 0 \le x \le 1 \}$

3. B bölgesi $|x| + |y| = 1$ karesi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre, $f(x, y) = y - 2x^2$ fonksiyonunun B üzerindeki integralini hesaplayınız.

4. Aşağıdaki integrallerin

(a) İntegrasyon bölgesini çiziniz.

(b) İntegrasyon sırasını değiştiriniz.

(c) Değerini hesaplayınız.

1) $\int_0^1 \int_x^{2x} dy \, dx$

2) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x+y) \, dx \, dy$

3) $\int_1^{e^2} \int_{\ln y}^2 dx \, dy$

4) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2x^2}}^{\sqrt{4-2x^2}} x \, dy \, dx$

5. Aşağıdaki integrallerin

(a) İntegrasyon bölgesini çiziniz.

(b) İntegrasyon sırasını değiştiriniz.

1) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) \, dy \, dx$

2) $\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^2 f(x, y) \, dy \, dx$

3) $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx$

4) $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \int_x^1 f(x, y) \, dy \, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{2x} f(x, y) \, dy \, dx$

5) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}} f(x, y) \, dx \, dy + \int_4^8 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2y}} f(x, y) \, dx \, dy$

6. Aşağıdaki integrallerini hesaplayınız.

(a) $\int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy dx$ (b) $\int_0^{1}\int_y^{1} x^2 e^{xy}\,dx dy$

(c) $\int_0^{2}\int_x^{2} 2y^2 \sin(xy)\,dy dx$ (d) $\int_0^{2}\int_{0}^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

(e) $\int_0^{3}\int_{\sqrt[3]{x}}^{1} e^{y^3}\,dy\,dx$ (f) $\int_0^{2}\int_{y/2}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy$

(g) $\int_0^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy\,dx}{y^4+1}$ (h) $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,dx\,dy$

(ı) $\int_0^{1}\int_{-1}^{-y} e^{x^2}\,dx\,dy + \int_0^{1}\int_{y}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy$

7. B bölgesi, $y = 2x - 2$, $y = 2x - 4$, $y = -x + 2$ ve $y = -x + 4$ denklemli doğrular tarafından sınırlanan bölgedir.

$$I = \iint_B (2x - y)^2\,dA$$

integralini

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - y \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

8. B bölgesi, $x^2 + y^2 = 1$ ile $x^2 + y^2 = 16$ çemberleri tarafından sınırlanan bölgedir.

$$I = \iint_B \left(x^2 + y^2\right)^{1/4}\,dA$$

integralini, kutupsal koordinatlar yardımıyla hesaplayınız.

9. B bölgesi, $5x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgedir.

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = -2u + v \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla

$$I = \iint_B \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2}\,dA$$

integralini hesaplayınız.

10. B integrasyon bölgesi, birinci bölgede

$$x^2 - y^2 = 1,\quad x^2 - y^2 = 9,\quad xy = 2,\quad xy = 4$$

denklemli hiperboller tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iint_B \left(x^2 + y^2\right) dA$$

integralini hesaplayınız.

11. B integrasyon bölgesi, $y = x^2$, $4y = x^2$, $2x = y^2$, $3x = y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$\iint_B dx\,dy$$

integralini hesaplayınız.

12. B integrasyon bölgesi $x^2 + y^2 \le 1$ dairesi olduğuna göre $\iint_B \left(1 - x^2 - y^2\right) dx\,dy$ integralini kutupsal koordinatlara geçerek hesaplayınız.

13. $B\{(x, y) : 1 \le x \le 2$ ve $0 \le y \le x\}$ olduğuna göre

$$\iint_B \frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{x}\,dx\,dy$$

integralini kutupsal koordinatlar yardımıyla hesaplayınız.

14. B bölgesi, köşeleri $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$ olan paralelkenar olduğuna göre

$$\iint_B (x - y)^2 \sin^2(x + y)\,dx\,dy$$

integralini

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

15. B bölgesi, birinci bölgede $x + y = 1$, $x + y = 2$ doğrularıyla koordinat eksenleri arasında kalan bölge olduğuna göre

$$\iint_B \frac{(x - y)^2}{1 + x + y}\,dx\,dy$$

integralini

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1.

(a) $\int_0^1\int_2^4 x^2y\,dy\,dx = \int_0^1 x^2\,\frac{1}{2}y^2\Big|_2^4 dx = \int_0^1 6x^2\,dx = 2x^3\Big|_0^1 = 2$

(b) $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 x^2\arctan y\Big|_0^1 dx = \int_0^1 x^2(\arctan 1 - \arctan 0)\,dx = \int_0^1 x^2\cdot\frac{\pi}{4}\,dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{12}$

(c) $\int_0^1\int_0^x (3-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1\left(3x - xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^x = \int_0^1\left(3x - \frac{3}{2}x^2\right)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

(d) $\int_1^2\int_{16x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx = \int_1^2 -\frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int_1^2\left(-x + x^3\right)dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{y}\Big|_1^2 = -2 + \frac{16}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

(e) $\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y\,dy\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\sin x} dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$

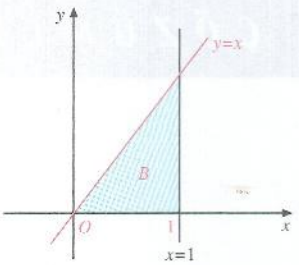
(f) $\int_0^1\int_2^{4-2x} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_2^{4-2x} dx = \int_0^1 (4-2x-2)\,dx = \int_0^1 (2-2x)\,dx = 2x - x^2\Big|_0^1 = 1.$

2.

(a) $f(x,y)=x+y$

$$\iint_B (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^x dx$$

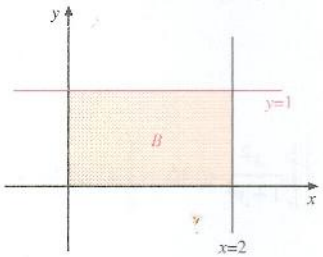
$$= \int_0^1 \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{1}{2}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$



(b) $f(x,y)=4-x-y$,

$$\iint_B (4-x-y)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^1 (4-x-y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(4y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 (2-2x)\,dx = 2x - x^2 \Big|_0^1 = 1.$$



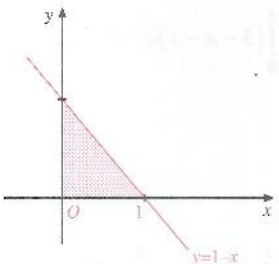
(c) $f(x,y)=y-\sqrt{x}$

$$\iint_B \left(y-\sqrt{x}\right) dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(y-\sqrt{x}\right) dy\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 - \sqrt{x}\,y \right) \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(1-x)^2 - \sqrt{x}(1-x) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - x - x^{1/2} + x^{3/2} + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{10}.$$



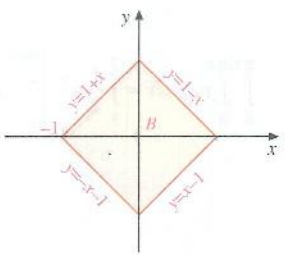
3. $$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{x+1} \left(y-2x^2\right) dy\,dx + \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \left(y-2x^2\right) dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}y^2 - 2x^2 y \right) \Big|_{-x-1}^{x+1} dx + \int_0^0 \left(\frac{1}{2}y^2 - 2x^2 y \right) \Big|_{-x-1}^{x+1} dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2x^2(x+1) - \frac{1}{2}(-x-1)^2 + 2x^2(-x-1) \right] dx$$

$$+ \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2x^2 - 2x^2(x+1) - \frac{1}{2}(-x-1)^2 + 2x^2(-x-1) \right] dx$$

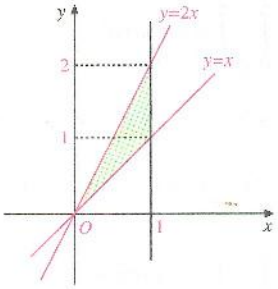
$$= \int_{-1}^1 \left(-4x^3 4x^2 \right) dx + \int_0^1 \left(-4x^3 - 4x^2 \right) dx = -\frac{4}{3}x^3 \Big|_{-1}^1 = -\frac{8}{3}.$$



4.

(1) $\int_0^1 \int_x^{2x} dy\,dx = \int_0^1 \int_{y/2}^{4} dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dx\,dy$

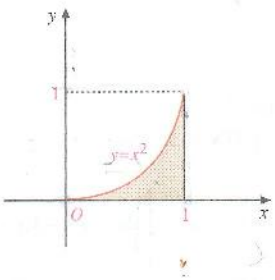
$$\int_0^1 \int_x^{2x} dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_x^{2x} = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$



(2) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y=0}^{x^2} (x+y)\,dy\,dx$

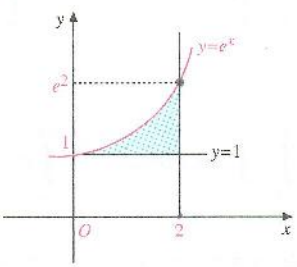
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x\frac{y^2}{2} + xy\right)\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^5 + x^3\right) dx$$

$$= \frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$



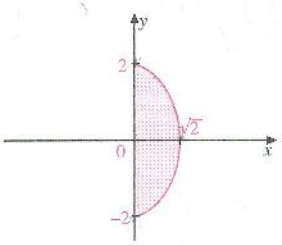
(3) $\int_1^{e^2} \int_{\ln y}^{2} dx\,dy = \int_0^2 \int_1^{e^x} dy\,dx = \int_0^2 y\Big|_1^{e^x} dx = \int_0^2 \left(e^{x-1}\right) dx = e^x - x\Big|_0^2$

$$= e^2 - 2 - 1 = e^2 - 3.$$



(4) $y = \sqrt{4-2x^2} \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4-y^2}{2}}$

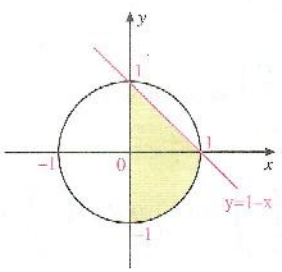
$$I = \int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{\frac{4-y^2}{2}}} x\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}\left(\frac{4-y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{4}\left(4y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{8}{3}$$



5.

(1) $y = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1\,, \quad y = 1 - x$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

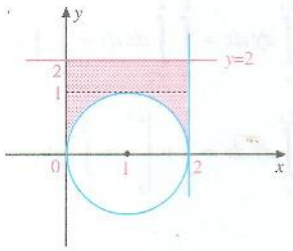


(2) $I=\int_0^2\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$

$y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow$

$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{1-y^2}$

$I=\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy+\int_0^1\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy+\int_1^2\int_0^2 f(x,y)\,dx\,dy$

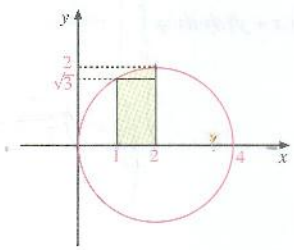


(3) $\int_1^2\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

$y=\sqrt{4x-x^2} \Rightarrow x^2-4x+y^2=0 \Rightarrow$

$(x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{4-y^2}$

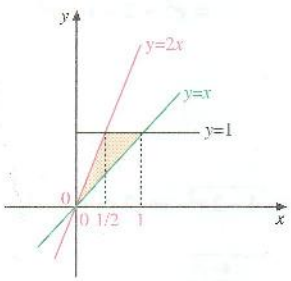
$I=\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy+\int_{\sqrt{3}}^2\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^2 f(x,y)\,dx\,dy$



(4) $I=\int_{1/2}^1\int_1^{2x} f(x,y)\,dy\,dx+\int_0^{1/2}\int_x^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$

$y=2x,\ y=x \Rightarrow x=y/2$ ve $x=y.$

$I=\int_0^1\int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$



(5) $x=\sqrt{y} \Rightarrow y=x^2$

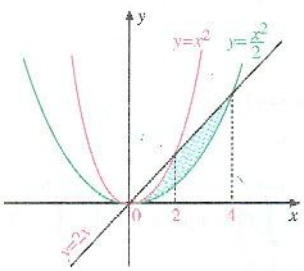
$x=\sqrt{2y} \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}$

$x=\frac{y}{2} \Rightarrow y=2x$

$\left.\begin{matrix} y=x^2 \\ y=2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=0 \vee x=2$

$\left.\begin{matrix} y=\frac{x^2}{2} \\ y=2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=0 \vee x=4$

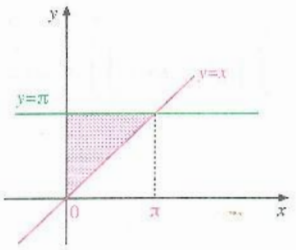
$I=\int_0^2\int_{x^2/2}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx+\int_2^4\int_{x^2/2}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$



6.

(a) $I = \int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,x\,\Big|_0^{y} dy = \int_0^{\pi} \sin y\,dy = -\cos y\,\Big|_0^{\pi}$

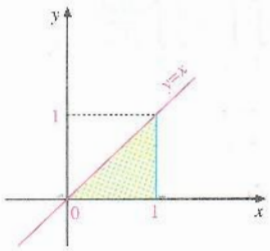
$= 1 + 1 = 2$



(b) $I = \int_0^{1}\int_y^{1} x^2 e^{xy}\,dx\,dy$

$I = \int_0^{1}\int_0^{x} x^2 e^{xy}\,dy\,dx = \int_0^{1} xe^{xy}\,\Big|_0^{x} dx = \int_0^{1} xe^{x^2} - x\,dx = \frac{1}{2}ex^2 - \frac{x^2}{2}\,\Big|_0^{1}$

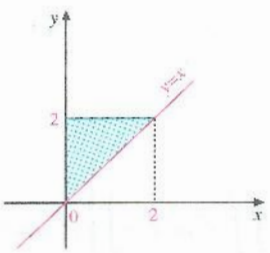
$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$



(c) $I = \int_0^{2}\int_x^{2} 2y^2 \sin(xy)\,dy\,dx$

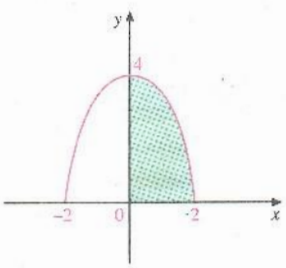
$I = \int_0^{2}\int_0^{y} 2y^2 \sin(xy)\,dx\,dy = \int_0^{2} 2y\left(-\cos(xy)\,\Big|_0^{y}\,dy\right) = \int_0^{2} -2y\cos(y^2) + 2y\,dy$

$= -\sin(y^2) + y^2\,\Big|_0^{2} = 4 - \sin 4$

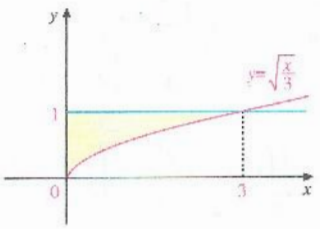


(d) $I = \int_0^{2}\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

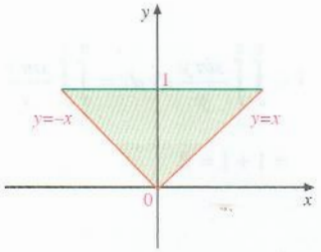
$I = \int_0^{4}\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{4} \frac{e^{2y}}{4-y}(4-y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{4} e^{2y}\,dy = \frac{1}{4}e^{2y}\,\Big|_0^{4} = \frac{e^8 - 1}{4}$



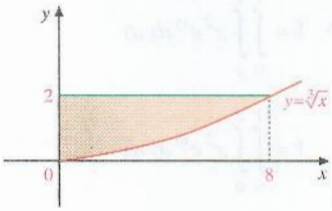
(e) $I = \int_0^{3}\int_{\frac{1}{3}x}^{1} e^{y^3}\,dy\,dx = \int_0^{1}\int_0^{3y^2} e^{y^3}\,dx\,dy = \int_0^{1} 3y^2 e^{y^3}\,dy = e^{y^3}\,\Big|_0^{1} = e - 1$



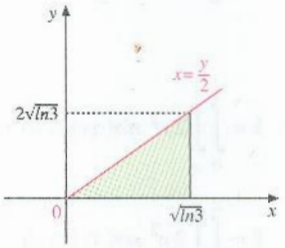
(f) $$I=\int_{-1}^{0}\int_{-y}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy+\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy=\int_{0}^{1}\int_{-x}^{x} e^{x^2}\,dy\,dx=\int_{0}^{1} 2xe^{x^2}\,dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1$$



(g) $$I=\int_{0}^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}=\int_{0}^{2}\int_{0}^{y^3}\frac{dx\,dy}{y^4+1}=\int_{0}^{2}\frac{y^3}{1+y^4}\,dy=\frac{1}{4}\ln\left(1+y^4\right)\Big|_0^2=\frac{\ln 17}{4}$$



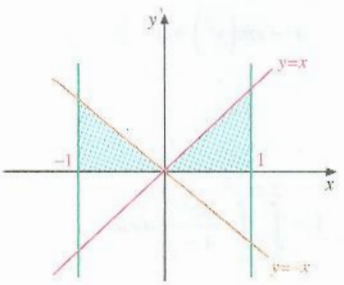
(h) $$I=\int_{0}^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,dx\,dy=\int_{0}^{\sqrt{\ln 3}}\int_{0}^{2x} e^{x^2}\,dy\,dx=\int_{0}^{\sqrt{\ln 3}} 2xe^{x^2}\,dx=e^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 3}}=3-1=2$$



(ı) $$I=\int_{0}^{1}\int_{-1}^{-y} e^{x^2}\,dx\,dy+\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{x} e^{x^2}\,dy\,dx+\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} e^{x^2}\,dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0} e^{x^2} y\Big|_0^{-x}\,dx+\int_{0}^{1} e^{x^2} y\Big|_0^{x}\,dx=\int_{-1}^{0} -e^{x^2}\,dx+\int_{0}^{1} e^{x^2}\,dx$$

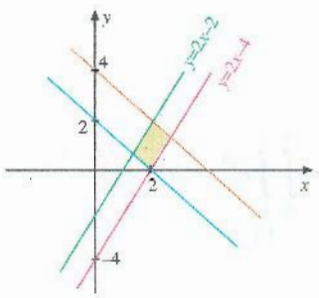
$$=-\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=e-1.$$



7. $u=x+y$
$v=2x-y$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-1}{3}$$

$$I=\iint_B (2x-y)^2\,dA=\iint_{B'} v^2\cdot\left|-\frac{1}{3}\right|du\,dv=\frac{1}{3}\iint_{B'} v^2\,du\,dv$$

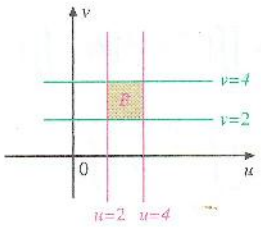


$y = 2x - 2 \Rightarrow 2x - y = 2 \Rightarrow v = 2$

$y = 2x - 4 \Rightarrow 2x - y = 4 \Rightarrow v = 4$

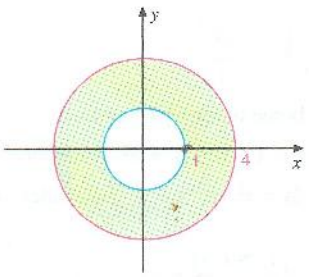
$y = -x + 2 \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow u = 2$

$y = -x + 4 \Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow u = 4$



$$I = \int_2^4 \int_2^4 v^2 \, dv \, du = \int_2^4 \frac{1}{3} v^3 \Big|_2^4 du = \frac{56}{3} \int_2^4 du = \frac{112}{3}.$$

8. $\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$



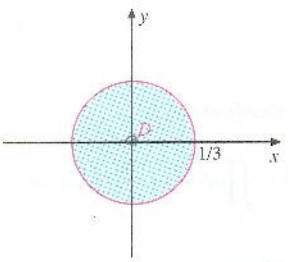
$$\iint_B \left(x^2 + y^2\right)^{1/4} dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_1^4 \left(r^2\right)^{1/4} r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_1^4 r^{3/2} \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{2}{5} r^{5/2} \Big|_1^4$$

$$= \frac{2}{5}(32 - 1)2\pi = \frac{124}{5}\pi.$$

9. $5(u+v)^2 + 2(u+v)(-2u+v) + 2(-2u+v)^2 = 1 \Rightarrow$

$9(u^2 + v^2) = 1 \Rightarrow$

$u^2 + v^2 = \frac{1}{9}$ çemberi elde edilir.



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$I = \iint_B \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} \, dA = \iint_D \sqrt{9\left(u^2 + v^2\right)} \cdot 3 \, du \, dv = 9 \iint_B \sqrt{u^2 + v^2} \, du \, dv$$

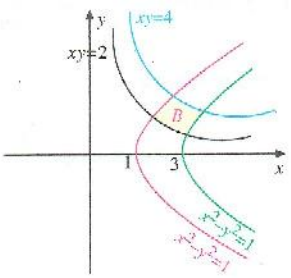
İntegrali elde edilir. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$I = 9 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/3} r \cdot r \, dr \, d\varphi = 9 \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{1/3} = 3 \cdot \left(\frac{1}{27}\right) 2\pi = \frac{2\pi}{9}.$$

bulunur.

10. $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$ dönüşümü yapılırsa

$u = 1$, $u = 9$, $v = 2$, $v = 4$ doğruları elde edilir.



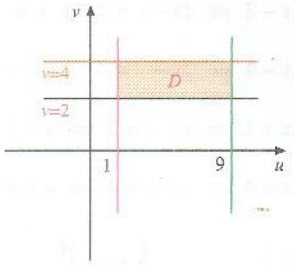
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2x - 2y \\ y \quad x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2x^2 + 2y^2}$$

olacağından

$$I = \iint_B \left(x^2+y^2\right)dA = \iint_D \left(x^2+y^2\right).\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^9\int_2^4 dv\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^9 v\,\Big|_2^4\,du = \int_1^9 du = 9-1 = 8$$

bulunur.



11. $\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{y} \\ v = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$

bölge dönüşümü yapılırsa

$y = x^2$ ve $4y = x^2$ parabolleri $u = 1$ ve $u = 4$ denklemli doğrulara,

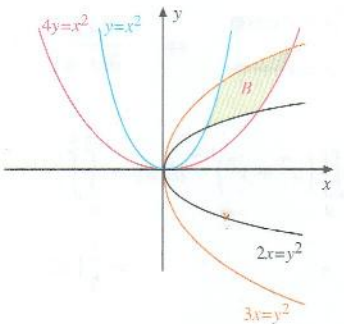
$2x = y^2$ ve $3x = y^2$ parabolleri de $v = 2$ ve $v = 3$ doğrularına dönüşür.

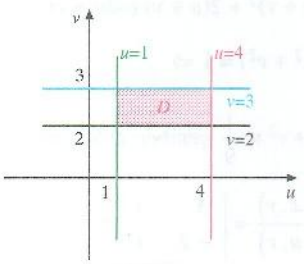
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

olacağından

$$1 = \iint_B dx\,dy = \iint_D \frac{1}{5}\,du\,dv = \frac{1}{5}\int_1^4\int_2^3 dv\,du = \frac{1}{5}.1.3 = \frac{3}{5}$$

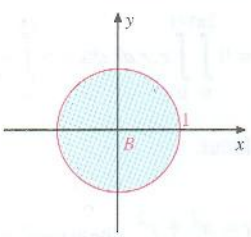
bulunur.





12. $I = \iint_B \left(1-x^2-y^2\right)dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-r^2\right)r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r-r^3\right)dr\,d\varphi$

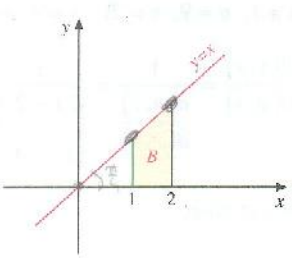
$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\,\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$



13. $x = 1 \Rightarrow r\cos\varphi = 1 \Rightarrow r = \dfrac{1}{\cos\varphi}$

$x = 2 \Rightarrow r\cos\varphi \Rightarrow r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$

$y = x \Rightarrow r\cos\varphi = r\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

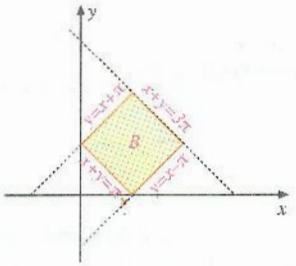


$$I=\iint_B \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,dx\,dy=\int_0^{\pi/4}\int_{1/\cos\varphi}^{2/\cos\varphi}\frac{r\sin\varphi\,.\,r}{r\cos\varphi}\,r\,dr\,d\varphi=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\tan\varphi\,.\,r^3\Big|_{1/\cos\varphi}^{2/\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{7}{3}\int_0^{\pi/4}\frac{\tan\varphi}{\cos^3\varphi}\,d\varphi=\frac{7}{3}\int_0^{\pi/4}\cos^{-4}\varphi\,.\sin\varphi\,d\varphi=\frac{7}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos^{-3}\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4}=-\frac{7}{9}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-1\right)$$

$$=\frac{7}{36}\left(4-\sqrt{2}\right)$$

14. $\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}$

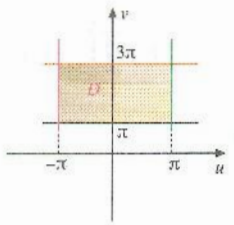


$x+y=3\pi \rightarrow v=3\pi,$

$x+y=\pi \rightarrow v=\pi$

$y=x+\pi \rightarrow u=-\pi,\quad y=x-\pi \rightarrow u=\pi$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$



$$I=\iint_B (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dx\,dy=\iint_D u^2\sin^2 v\,\frac{1}{2}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u^2\sin^2 v\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\frac{u^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}\sin^2 v\,dv=\frac{\pi^3}{3}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2v)dv=\frac{\pi^3}{6}\left(v-\frac{1}{2}\sin 2v\right)\Big|_{\pi}^{3\pi}=\frac{\pi^4}{3}.$$

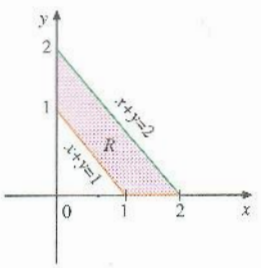
15. $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$

$x+y=2 \rightarrow u=2$

$x+y=1 \rightarrow u=1$

$x=0 \rightarrow u=-v$

$y=0 \rightarrow u=v$

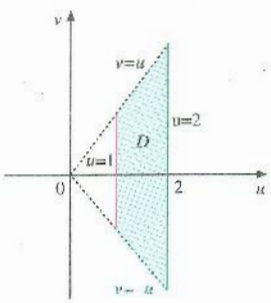


$$I=\iint_B \frac{(x-y)^2}{1+x+y}\,dx\,dy\iint_D \frac{v^2}{1+u}\,.\,|J|\,du\,dv$$

olacaktır.

$$I=\int_1^2\int_{-u}^{u}\frac{v^2}{1+u}\,.\,\frac{1}{2}\,dv\,du=\frac{1}{6}\int_1^2\frac{1}{1+u}\,v^3\Big|_{-u}^{u}du=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{u^3}{1+u}du=\frac{1}{3}\int_1^2\left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{2}u^2+u-\ln|u+1|\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\ln\frac{3}{2}\right)$$

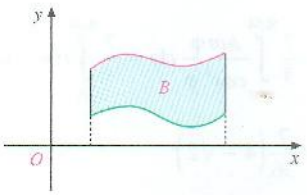


İKİ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

ALAN HESABI

$x\,O\,y$ düzleminde kapalı bir B bölgesinin alanı

$$Alan(B) = \iint_B dx\,dy$$



dir. Eğer Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$Alan(B) = \iint_B r\,dr\,d\varphi$$

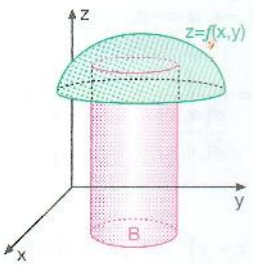
eşitliği elde edilir. ∇ Jacobien.

HACİM HESABI

$z = f(x,y)$ denklemli yüzey, B bölgesi ve B bölgesini taban kabul eden dik silindir arasında kalan bölgenin V hacmi

$$V = \iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

olur.



www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

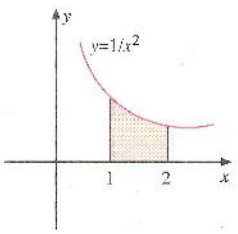
byns

PROBLEMLER

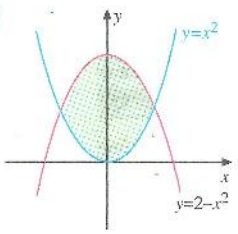
- Alan Hesabı
- Hacim Hesabı

1. Aşağıdaki taralı olarak verilen bölgelerin alanını bulunuz.

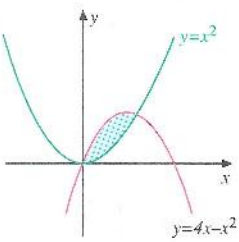
a)



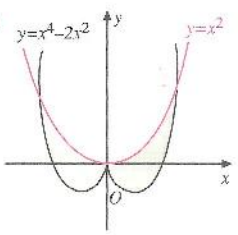
b)



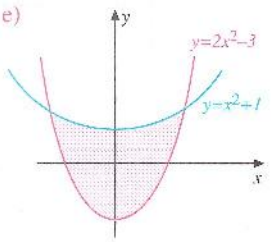
c)



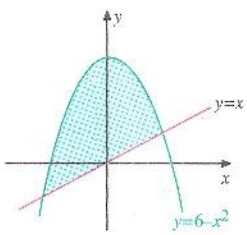
d)



e)



f)



2. Aşağıda denklemleri verilen eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

(a) $y = 4x - x^2$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$

(b) $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$

(c) $y = (x-1)^2$, $y = (x+1)^2$, $y = 0$

(d) $y = x^2 + 1$, $y = -x^2$, $x = 0$, $x = 3$

(e) $y = x$, $y = 2x$, $xy = 2$

(f) $y = x^2$, $y = 2x + 3$

(g) $y = x^2$, $y = -x$

(h) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $y = 0$

(i) $y = x^4$, $y = 8x$

(i) $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$

(k) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$

3. $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

4. $r = 2(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidi ile $r = 2\cos\varphi$ çemberi tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

5. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ lemniskatı tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

6. $r = 12\cos\varphi$ gülünün bir yaprağının alanını bulunuz.

7. $r = 1 + \cos\varphi$, $r = 1 - \cos\varphi$ kordiyoidlerinin her ikisinin de içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

8. $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$ elipsi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. $z = x^2 + y^2$ paraboloidiyle $z = 0$, $x = -3$, $x = 3$, $y = -3$, $y = 3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

10. $4z = x^2 + y^2$ paraboloidi, $x^2 + y^2 = 4y$ silindiri ve $z = 0$ düzlemi tarafından sınırlanan bölgenin hacmını bulunuz.

11. $z = x + y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmını bulunuz.

12. $x^2 + y^2 = 2y$ silindiri ile $z = 0$ ve $x + y + z = 6$ düzlemleri arasında kalan bölgenin hacmını bulunuz.

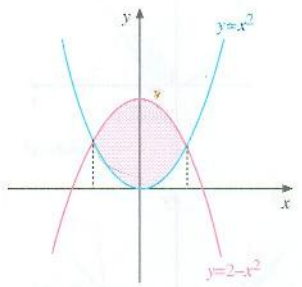
ÇÖZÜMLER

1.

(a) $A = \iint_B dx\,dy = \int_1^2 \int_0^{1/x^2} dy\,dx = \int_1^2 y \Big|_0^{1/x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ br^2$

(b) $x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

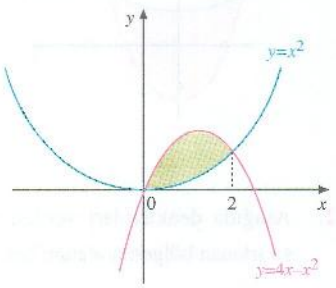
$$A = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{2-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{1} y \Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = \int_{-1}^{1} \left(2 - 2x^2\right) dx = \left(2x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\ br^2$$



(c) $x^2 = 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$

$2x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = 2$

$$A = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy\,dx = \int_0^2 \left(4x - 2x^2\right) dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

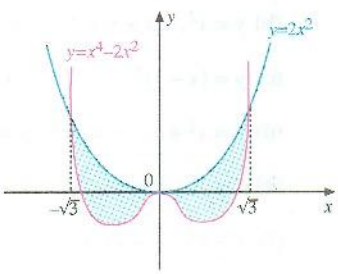


(d) $x^4 - 2x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow$

$x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2$

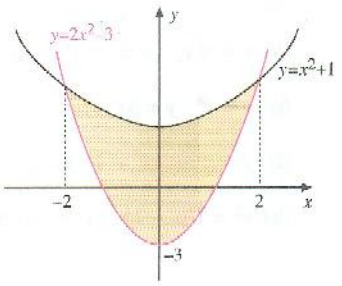
$$A = \int_{-2}^{2} \int_{x^4-2x^2}^{2x^2} dy\,dx = 2\int_0^2 \int_{x^4-2x^2}^{2x^2} dy\,dx = 2\int_0^2 y \Big|_{x^4-2x^2}^{2x^2} dx = 2\int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right) dx$$

$$= 2\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = \frac{128}{15}\ br^2$$



(e) $2x^2 - 3 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} \int_{2x^2-3}^{x^2+1} dy\,dx = \int_{-2}^{2} y \Big|_{2x^2-3}^{x^2+1} dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

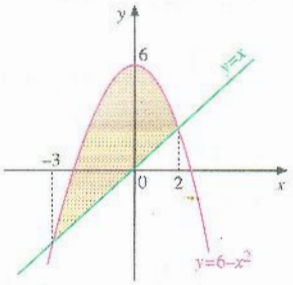


(f) $6-x^2=x \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow$

$(x+3)(x-2)=0 \Rightarrow x=-3 \vee x=2.$

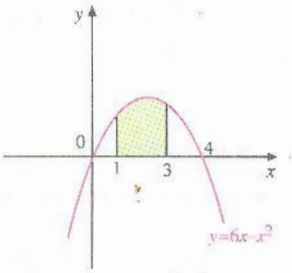
$$A=\int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2} dy\,dx=\int_{-3}^{2} y\Big|_{x}^{6-x^2} dx=\int_{-3}^{2}\left(6-x^2-x\right)dx=\left(6x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{2}$$

$$=12-\frac{8}{3}-2+18-9+\frac{9}{2}=\frac{125}{6}\ br^2$$



2.

(a) $$A=\int_{1}^{3}\int_{0}^{6x-x^2} dy\,dx=\int_{1}^{3}\left(6x-x^2\right)dx=\left(3x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{1}^{3}=27-18-3+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}\ br^2.$$

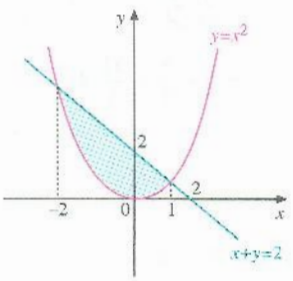


(b) $y=x^2,\ x+y=2,\ y=0$

$x^2=2-x \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow$

$(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2$ veya $x=1.$

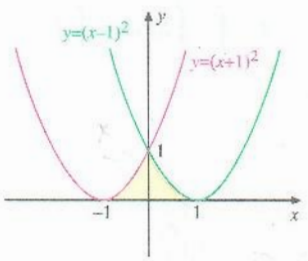
$$A=\int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} dy\,dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=\left(2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{7}{6}+\frac{10}{3}=\frac{9}{2}\ br^2$$



(c) $y=(x-1)^2,\ y=(x+1)^2,\ y=0$

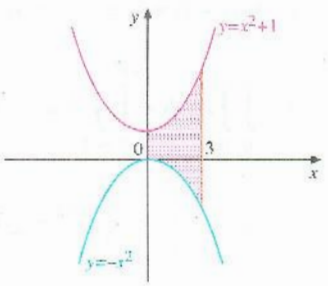
$$A=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{(x+1)^2} dy\,dx+\int_{0}^{1}\int_{0}^{(x-1)^2} dy\,dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

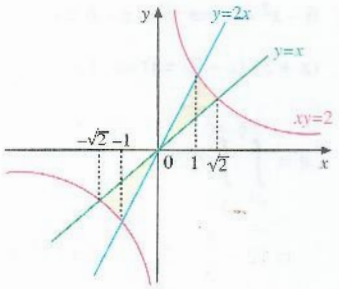


(d) $y=x^2+1,\ y=-x^2,\ x=0,\ x=3$

$$A=\int_{0}^{3}\int_{-x^2}^{x^2+1} dy\,dx=\int_{0}^{3} y\Big|_{-x^2}^{x^2+1} dx=\int_{0}^{3}\left(2x^2+1\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_{0}^{3}=21.$$



(e) $y = x$, $y = 2x$ / $xy = 2$.



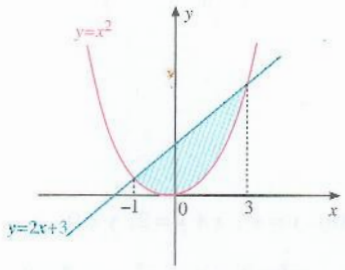
$$\left.\begin{matrix} y = 2x \\ xy = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \pm 1, \qquad y = \pm 2$$

$$\left.\begin{matrix} y = 2x \\ xy = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}, \qquad y = \pm\sqrt{2}$$

$$A = 2\int_0^1 \int_x^{2x} dy\,dx + 2\int_1^{\sqrt{2}} \int_x^{\frac{2}{x}} dy\,dx = 2\int_0^1 x\,dx + 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{x} - x\right) dx$$

$$= x^2 \Big|_0^1 + \left(4\ln x - x^2\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 1 + 4\ln\sqrt{2} - 2 + 1 = 2\ln 2.$$

(f) $y = x^2$, $y = 2x + 3$

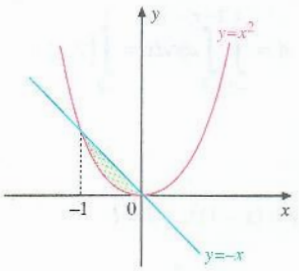


$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$

$$A = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} dy\,dx = \int_{-1}^{3} y \Big|_{x^2}^{2x+3} dx = \int_{-1}^{3} \left(2x + 3 - x^2\right) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}\ br^2.$$

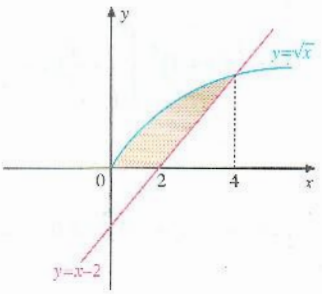
(g) $y = x^2$, $y = -x$



$x^2 = -x \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \ \vee\ x = -1$

$$A = \int_{-1}^{0} \int_{x^2}^{-x} dy\,dx = \int_{-1}^{0} \left(-x - x^2\right) dx = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{6}\ br^2$$

(h) $y = \sqrt{x}$ $y = -x - 2$, $y = 0$



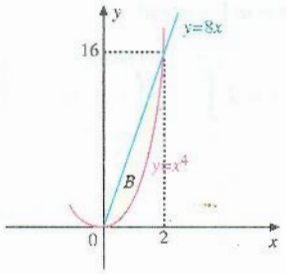
$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$

$(x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4 \ (x \geq 0)$ dır.

$$A = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx + \int_2^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 \left(\sqrt{x} - x + 2\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_2^4 = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}.8 - 8 + 8 - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 2 - 4 = \frac{10}{3}\ br^2$$

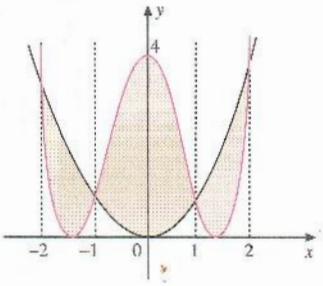
(i) $y = 8x,\ \ y = x^4,\ \ x^4 = 8x \Rightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$



$$A = \iint_B dy\,dx = \int_0^2 \int_{x^4}^{8x} dy\,dx = \int_0^2 \left(8x - x^4\right) dx = 4x^2 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = 16 - \frac{32}{5} = \frac{48}{5}\ br^2$$

(i) $y = x^4 - 4x^2 + 4,\ \ y = x^2 \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = x^2 \Rightarrow$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1,\ \ x_{3,4} = \pm 2$

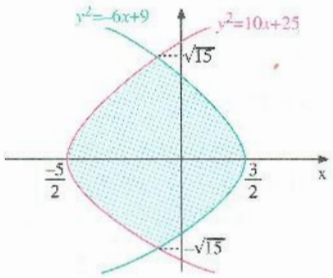


$$A = 2.\left[\int_0^1 \int_{x^2}^{x^4-4x^2+4} dy\,dx + \int_1^2 \int_{x^4-4x^2+4}^{x^2} dy\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 \left(x^4 - 4x^2 + 4 - x^2\right) dx + \int_1^2 \left(x^2 - x^4 + 4x^2\right) dx\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} - 4x\right)\Big|_1^2\right] = 2\left[\frac{38}{15} + \frac{22}{15}\right] = 8\ br^2$$

(k) $y^2 = 10x + 25,\ \ y^2 = -6x + 9$

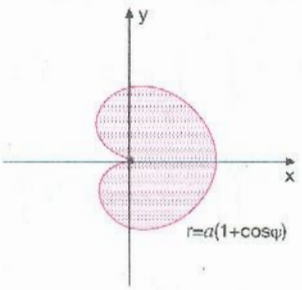


$10x + 25 = -6x + 9 \Rightarrow 16x = -16 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{15}$

$$A = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \int_{\frac{1}{10}\left(y^2 - 25\right)}^{\frac{1}{6}\left(9 - y^2\right)} dx\,dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(\frac{9 - y^2}{6} - \frac{y^2 - 25}{10}\right) dx$$

$$= \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(4 - \frac{4y^2}{15}\right) dy = \left(4y - \frac{4y^2}{45}\right)\Big|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} = \frac{16}{3}\sqrt{15}\ br^2.$$

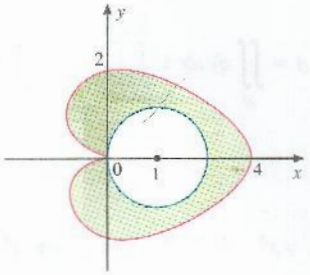
3. $r = a(1 + \cos\varphi)$



$$A = \iint_B r\,dr\,d\varphi = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} a^2\left(1 + \cos\varphi\right)^2 d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[a^2 + 2a^2\cos\varphi + a^2\frac{\left(1 + \cos 2\varphi\right)}{2}\right] d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2\ br^2$$

4. $r = a(1+\cos\varphi)$



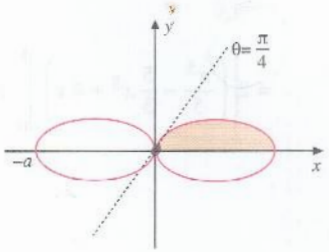
$$A = 2\int_0^{\pi/2}\int_{r=2\cos\varphi}^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi + 2\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[4(1+\cos\varphi)^2 - 4\cos^2\varphi\right]d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} 4(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}(1+2\cos\varphi)\,d\varphi + 4\int_{\pi/2}^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi$$

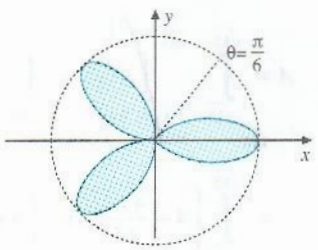
$$= 4(\varphi+2\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 4\left(\frac{\pi}{2}+2\right)+4\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi-2\right) = 5\pi$$

5. $r^2 = a^2\cos 2\varphi.\quad r=0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$



$$A = 4\iint_B r\,dr\,d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\,d\theta = 2.a^2\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 br^2$$

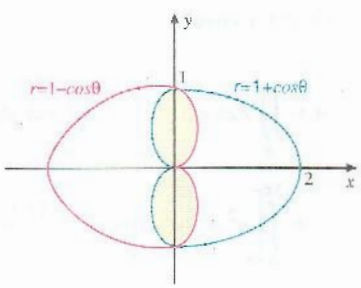
6. $r = 12\cos 3\varphi$



$$A = 2\int_{\theta=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{12\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta = a\int_0^{\pi/6} r^2\Big|_0^{12\cos 3\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/6} 12^2\left(\frac{\cos 6\theta+1}{2}\right)d\theta$$

$$= 72\left(\frac{\sin 6\theta}{6}+\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 12\pi$$

7. $r = 1+\cos\varphi,\quad r = 1-\cos\varphi$



$$A = 4\int_0^{\pi/2}\int_{r=0}^{1-\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi = 2\int_0^{\pi/2}\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi$$

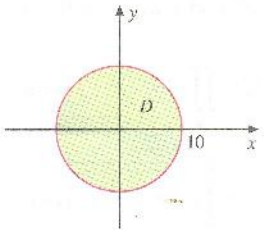
$$= 2\int_0^{\pi/2}\left(1-2\cos\varphi+\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)d\varphi = 2\left(\theta+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}+\frac{0}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3\pi}{2} - 4\ br^2$$

8. $(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100$

$u=x-2y+3 \quad v=3x+4y-1$ denirse $u^2+v^2=10^2$

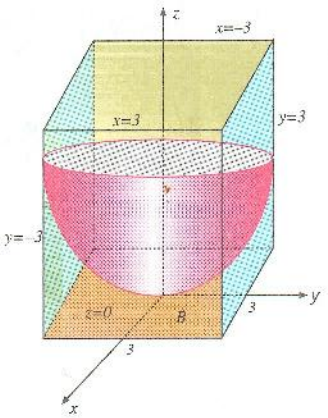
olur. Dönüşüm sonucunda elips çembere dönüşür.



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{1}{10}$$

$$A=\iint_D |J|\,du\,dv=\iint_D \frac{1}{10}\,du\,dv=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{10}\frac{r}{10}\,dr\,d\theta=\frac{10}{2}.2\pi=10\pi$$

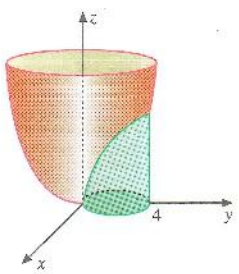
9. $z=x^2+y^2,\ z=0,\ x=-3,\ x=3,\ y=-3,\ y=3$



$$V=\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3}\left(x^2+y^2\right)dy\,dx=\int_{-3}^{3}x^2y+\frac{y^3}{3}\Big|_{-3}^{3}\,dx$$

$$=\int_{-3}^{3}\left(3x^2+9+3x^2+9\right)dx=2x^3+18x\Big|_{-3}^{3}=2(54+54)=216\ br^3$$

10. $4z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=4y \Rightarrow r^2=4r\sin\varphi \Rightarrow r=4\sin\varphi$



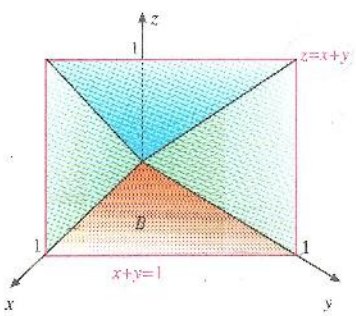
$$V=\iint_B\frac{x^2+y^2}{4}=2\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{4\sin\varphi}\frac{r^2}{4}\,r\,dr\,d\varphi=2\int_{0=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{4\sin\varphi}\frac{r^3}{4}\,dr\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}32(\sin\varphi)^4\,d\varphi$$

$$=32\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)d\varphi=32\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right)d\varphi$$

$$=32\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1-\cos 2\varphi}{2}-\frac{1}{4}(2\sin\varphi\cos\varphi)^2\right]d\varphi=16\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}-8\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,d\varphi$$

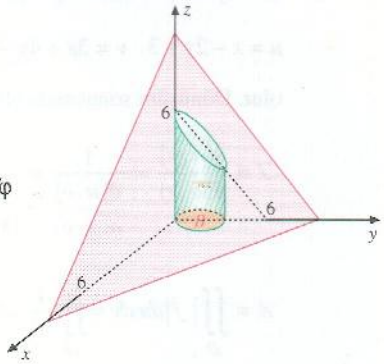
$$=8\pi-4\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=8\pi-4.\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=6\pi.$$

11. $V=\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)dy\,dx=\int_0^1\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left[x-x^2+\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx$



$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}(1-3)^3\right]\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

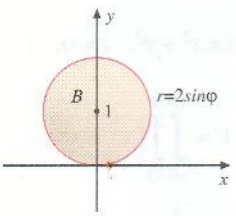
12. $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 0$, $x + y + z = 6$



$$V = \iint_B (16 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\varphi} (6 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \left(3r^2 - \frac{1}{3}r^3\cos\varphi - \frac{1}{3}r^3\sin\varphi \right) \Bigg|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} \left(12\sin^2\varphi - \frac{8}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{8}{3}\sin^4\varphi \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} 6(1 - \cos 2\varphi)\,d\varphi - \frac{8}{3}\int \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi - \frac{8}{3}\int \left[\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right]^2 d\varphi$$



$$= \left(6\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{3}\sin^4\varphi \Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{3}\int \left[1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4}{2}\,d\varphi \right]$$

$$= 6\pi - \frac{2}{3}\left(\varphi - \sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{8}\sin 4\varphi \right) \Bigg|_0^{\pi} = 6\pi - \frac{2}{3}\left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 5\pi\ br^3.$$

KÜTLE HESABI

Bir B bölgesine yerleştirilen bir levhanın yoğunluğu $\sigma(x,y)$ ise bu levhanın kütlesi $M = \iint_B \sigma(x,y)\,dx\,dy$ olur.

AĞIRLIK MERKEZİNİN KOORDİNATLARI

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_B x\sigma(x,y)\,dx\,dy, \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_B y\sigma(x,y)\,dx\,dy$$

Eğer levhanın yoğunluğu sabit, yani levha homojen ise

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_B x\,dx\,dy \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint_B y\,dx\,dy$$

olur. Burada A , bölgenin alanıdır.

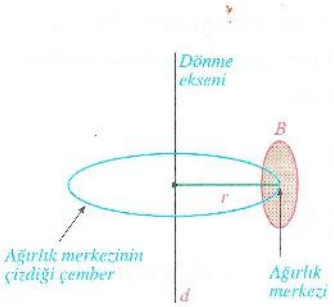
DÖNEL CİSİMLERİN HACMİ

TEOREM **(Birinci Pappus Teoremi)**

Düzlemsel bir B bölgesi, kendisiyle aynı düzlem içinde bulunan ve B nin içinden geçmeyen bir eksen etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel cismin V hacmi, B bölgesinin alanı ile B bölgesinin ağırlık merkezinin çizmiş olduğu çemberin çevre uzunluğunun çarpımına eşittir. Buna göre B bölgesinin alanı A, ağırlık merkezinin dönme eksenine olan uzaklığı r ise

$$V = 2\pi r\,.\,A$$

olur.



EYLEMSİZLİK MOMENTİ

B bölgesine yerleştirilen bir levhanın (x,y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x,y)$ ve d doğrusuna olan uzaklığı $\ell(x, y)$ ise bu levhanın d eksenine göre eylemsizlik momenti

$$I_d = \iint_B \sigma(x,y)\ell^2(x,y)\,dx\,dy$$

olur.

Bir $P(x,y)$ noktasının Ox-eksenine olan uzaklığı $|y|$, Oy- eksenine olan uzaklığı $|x|$ olduğundan, B levhasının Ox ve Oy eksenlerine göre eylemsizlik momentleri

$$I_x = \iint_B \sigma(x,y)\,y^2\,dx\,dy, \qquad I_y = \iint_B \sigma(x,y)\,x^2\,dx\,dy$$

olur. Levhanın $O(0,0)$ orijin noktasına göre eylemsizlik momenti

$$I_0 = \iint_B \sigma(x,y)\left(x^2 + y^2\right)dx\,dy$$

dir. Yukarıdaki bağıntılardan

$$I_0 = I_x + I_y$$

olduğu görülür.

byns

PROBLEMLER

- Kütle Hesabı
- Ağırlık Merkezi
- Dönel Cismin Hacmi
- Eylemsizlik Momenti

1. $y = x^2$ ve $x = y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan, bölgeye yerleştirilen bir levhanın yoğunluğu, her noktada o noktanın x-eksenine olan uzaklığının karesiyle orantılı olarak değişmektedir. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

2. a yarıçaplı daire şeklindeki bir levhanın σ yoğunluğu her noktada, o noktanın merkeze olan uzaklığı ile orantılı olarak değişmektedir. Dairenin sınırı üzerinde $\sigma = 6$ olduğuna göre bu levhanın kütlesini bulunuz.

3. Aşağıda denklemleri verilen doğru ve eğriler tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen levhanın yoğunluğu $\sigma(x, y)$ olduğuna göre bu levhanın kütlesini ve ağırlık merkezini bulunuz.

(a) $x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 6,$ $\sigma(x, y) = 1$

(b) $x = 0,\ y = 0,\ 2x + y = 4,$ $\sigma(x, y) = 1$

(c) $y = 0,\ y = x^2,\ x = 2,$ $\sigma(x, y) = 1$

(ç) $x = 0,\ y = 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,$ $\sigma(x, y) = 1$

(d) $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1,$ $\sigma(x, y) = x^2$

(e) $y = 6x - x^2,\ y = x,$ $\sigma(x, y) = 2$

(f) $x = 0, x = a, y = 0, y = a,$ $\sigma(x, y) = x + y$

(g) $y = 2x - x^2,\ y = 3x^2 - 6x,$ $\sigma(x, y) = k$

(h) $y = 0, y = \sqrt{a^2 - x^2},$ $\sigma(x, y) = y$

(ı) $y = 0, y = \sqrt{a^2 - x^2},$ $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(i) $r = 1 + \cos\varphi,$ $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

4. Birinci bölgede $x = 0,\ y = 0$ ve $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ tarafından sınırlanan homogen levhanın ağırlık merkezini Birinci Pappus Teoreminden yararlanarak hesaplayınız. [Söz konusu bölgenin Ox-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yarım kürenin hacminin $\frac{2}{3}\pi a^3$ olacağını hatırlayınız.]

5. Birinci bölgede koordinat eksenleriyle $y = e^{-x}$ eğrisi arasında kalan sınırsız bölgeye yerleştirilen homogen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

6. Birinci bölgede $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi ile koordinat eksenleri arasında kalan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

7. Yarıçapı a ve merkez açısı 2θ olan daire dilimi biçimindeki homogen levhanın ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

8. $y^2 = ax$ parabolü ile $x = a$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın $y = -a$ doğrusuna göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

9. $x + y = 2,\ x = 2,\ y = 2$ doğruları tarafından sınırlanan üçgensel bölgenin x-eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz.

10. $y^2 = ax$ ve $x = a$ tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen bir levhanın $O(0,0)$ noktasına göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

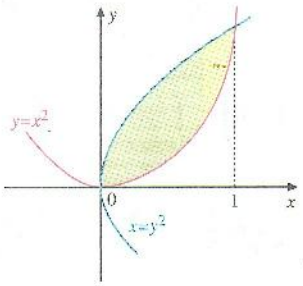
11. $x = y^2$ ve $x = 2y - y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen ve (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y) = 1 + y$ olan levhanın Ox-eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz.

12. a yarıçaplı daire şeklindeki homogen bir levhanın daire merkezine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

13. $r^2 = 4\cos 2\varphi$ lemniskatı tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın kutup noktasına göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

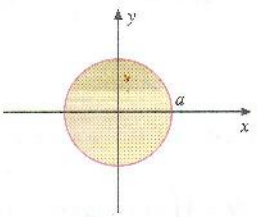
1. $\sigma(x, y) = ky^2$



$$M = \iint_B ky^2\,dx\,dy = k\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2\,dy\,dx = k\int_0^1 \frac{1}{3}y^3\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \frac{k}{3}\int_0^1 \left(x^{3/2} - x^6\right)dx$$

$$= \frac{k}{3}\left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{35}k.$$

2. $\sigma(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 6 = k.a \Rightarrow k = \frac{6}{a}$

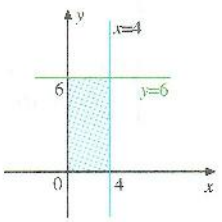


$$\sigma(x, y) = \frac{6}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$M = \iint_B \frac{6}{a}\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \frac{6}{a}\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{a} r\,r\,dr\,d\varphi = \frac{6}{a}\int_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_o^a d\varphi = \frac{6}{a}.\frac{a^3}{3}.2\pi = 4\pi\,a^2$$

3.

(a) $A = \int_0^4\int_0^6 dy\,dx = 6.4 = 24\ br^2$

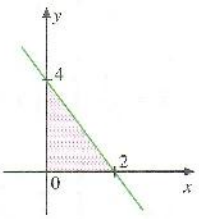


$$\bar{x} = \frac{1}{24}\int_0^4\int_0^6 x\,dx\,dy = \frac{1}{24}\int_0^4 xy\Big|_0^6\,dx = \frac{1}{24}\int_0^4 6x\,dx = \frac{1}{24}3x^2\Big|_0^4 = 2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{24}\int_0^4\int_0^6 y\,dy\,dx = \frac{1}{24}\int_0^4 \frac{1}{2}y^2\Big|_0^6 = \frac{1}{24}.18.4 = 3.$$

Ağırlık merkezi $G(2, 3)$ noktasıdır.

(b) $A = \frac{1}{2}.2.4 = 4\ \ b^2$

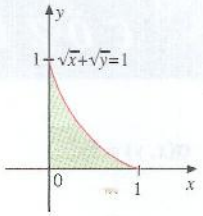


$$\bar{x} = \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^{4-2x} x.1.\,dx\,dy = \frac{1}{4}\int_0^2 xy\Big|_0^{4-2x}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x(4-2x)\,dx = \frac{1}{4}\left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^{4-2x} y\,dy\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{4-2x}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^2 (4-2x)^2\,dx = \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{6}(4-2x^3)\right]\Big|_0^2 = \frac{4^3}{4.6} = \frac{4}{3}$$

Ağırlık merkezi $G\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ noktasıdır.

(ç) $x=0,\ y=0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\ \sigma(x,y)=1$



$$A=\int_0^1\int_0^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}dy\,dx=\int_0^1\left(1-2\sqrt{x}+x\right)dx=x-\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

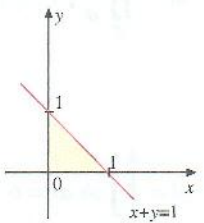
$$\bar{x}=6\int_0^1\int_0^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}x\,dy\,dx=6.\int_0^1 xy\Big|_0^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}dx=6\int_0^1\left(x-2x^{3/2}+x^2\right)dx$$

$$=6\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{5}x^{5/2}+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=6\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

olur. Bölge $y=x$ doğrusuna göre simetrik ve levha homogen olduğundan $\bar{y}=\frac{1}{5}$ dir Ağırlık merkezi $C\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$ dir.

(d) $x=0,\ y=0,\ x+y=1;\ \sigma(x,y)=x^2$

$$M=\iint_B\sigma(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{1-x}x^2\,dy\,dx=\int_0^1 x^2y\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=\frac{1}{12}$$

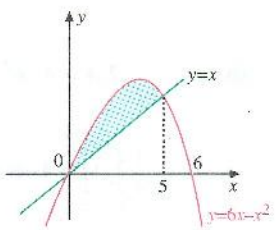


$$\bar{x}=12\int_0^1\int_0^{1-x}x.x^2\,dy\,dx=12\int_0^1 x^3y\Big|_0^{1-x}=12\int_0^1\left(x^3-x^4\right)dx=12\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=12\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

$$\bar{y}=12\int_0^1\int_0^{1-x}yx^2\,dy\,dx=6\int_0^1 x^2y^2\Big|_0^{1-x}dx=6\int_0^1 x^2\left(1-2x+x^2\right)dx=6\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}$$

(e) $y=6x-x^2,\ y=x;\ \sigma(x,y)=2$

$6x-x^2=x\ \Rightarrow\ x(x-5)=0\ \Rightarrow\ x=0\ v\ x=5$



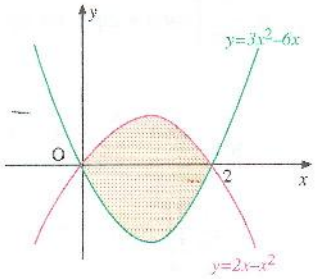
$$M=\int_0^5\int_x^{6x-x^2}2\,dy\,dx=\int_0^5 2y\Big|_x^{6x-x^2}dx=2\int_0^5\left(5x-x^2\right)dx=2\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^5=\frac{125}{3}$$

$$\bar{x}=\frac{3}{125}\int_0^5\int_x^{6x-x^2}x\,dy\,dx=\frac{3}{125}\int_0^5\left(5x^2-x^3\right)dx=\frac{3}{125}\left(\frac{5}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^5=\frac{3}{125}\left(\frac{625}{3}-\frac{625}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

$$\bar{y}=\frac{3}{125}\int_0^5\int_x^{6x-x^2}y\,dy\,dx=\frac{3}{125}\int_0^5\frac{1}{2}y^2\Big|_x^{6x-x^2}dx=\frac{3}{250}\int_0^5\left(36x^2-12x^3+x^4-x^2\right)dx$$

$$=\frac{3}{250}\left(35.\frac{x^3}{3}-3x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^5=\frac{5}{2}$$

(g) $y = 2x - x^2,\ \ y = 3x^2 - 6x;\ \ \sigma(x,y) = k.$



$2x - x^2 = 3x^2 - 6x \ \Rightarrow\ 4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

$$M = \iint_B \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} k\,dy\,dx = k\int_0^2 \left(4x^2 + 8x\right)dx = k\left(-\frac{4}{3}x^3 + 4x^2\right)\Big|_0^2$$

$$= k.\left(-\frac{32}{3} + 16\right) = \frac{16k}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\frac{16k}{3}}\int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} k.x\,dy\,dx = \frac{3}{16}\int_0^2 \left(8x^2 - 4x^3\right)dx = \frac{3}{16}\left(\frac{8}{3}x^3 - x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{3}{16}\left(\frac{64}{3} - 16\right) = 1$$

olur. Bölge $x = 1$ doğrusuna göre simetrik ve levha homogen olduğundan bu beklenilen bir sonuçtur.

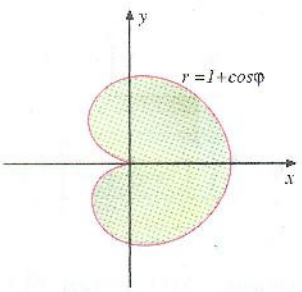
$$\bar{y} = \frac{3}{164}\int_0^2 \int_{3x^2}^{3x^2-6x} k\,y\,dy\,dx = \frac{3}{32}\int_0^2 \left[\left(2x - x^2\right)^2 - \left(3x^2 - 6x\right)^2\right]dx$$

$$= \frac{3}{32}\int_0^2 \left(-8x^4 + 32x^3 - 32x^2\right)dx = \frac{3}{4}\int_0^2 \left(-x^4 + 4x^3 - 4x^2\right)dx = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{5}x^5 + x^4 - \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = -\frac{4}{5}$$

(i) $r = 1 + \cos\varphi,\ \ \sigma(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$$M = \iint_B \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r\,r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^3\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(1 + 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + \cos^3\varphi\right)d\varphi$$



$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left[1 + 3\cos\varphi + \frac{3}{2}\left(1 + \cos 2\varphi\right) + \left(1 - \sin^2\varphi\right)\cos\varphi\right]d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\left[\varphi + 3\sin\varphi + \frac{3}{2}\varphi + \frac{3}{4}\sin\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}.\frac{5}{2}.2\pi = \frac{5\pi}{3}.$$

$$\bar{x} = \frac{3}{\pi}\iint_B x.\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy = \frac{3}{5\pi}\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r\cos\varphi.r.r\,dr\,d\varphi = \frac{3}{5\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi.\frac{r^4}{4}\Big|_0^{1+\cos\varphi}$$

$$= \frac{3}{20\pi}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^4\cos\varphi\,d\varphi = \frac{3}{20\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi + 4\cos^2\varphi + 6\cos^3\varphi + 4\cos^4\varphi + \cos^5\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{3}{20\pi}\int_0^{2\pi} \left[\cos\varphi + 2\left(1 + \cos 2\varphi\right) + 6\left(1 - \sin^2\varphi\right)\cos\varphi\,d\varphi + 4\left(1 + \cos 2\varphi\right)^2 + \left(1 - \sin^2\varphi\right)^2\cos\varphi\right]d\varphi$$

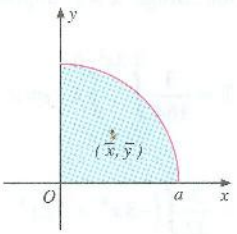
$$= \frac{3}{20\pi}\left[\sin\varphi + 2\varphi + \sin 2\varphi + 6\sin gj - 2\sin^3\varphi\right]\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{20\pi}\int_0^{2\pi}\left[4\left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) + \left(1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\right)\cos\varphi\right]d\varphi$$

$$= \frac{3}{20\pi}.4\pi + \frac{3}{20\pi}.\left[6\varphi + 4\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi + \sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi + \frac{1}{5}\sin^5\varphi\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{5} + \frac{3}{20\pi}.12\pi = \frac{3}{5} + \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{5\pi}\iint_B y\sigma(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{5\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} r\sin\varphi.r.r\,dr\,d\varphi = \frac{3}{5\pi}\int\frac{1}{4}(1+\cos\varphi)^4\sin\varphi d\varphi = \frac{-3}{5\varphi}\left(-\frac{1}{20}\right).(1+\cos\varphi)^5\Big|_0^{2\pi} = 0$$

bulunur. Ağırlık merkezi $G\left(\frac{12}{5}, 0\right)$ dir.

4. Sözkonusu bölge y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin (yarım kürenin hacmi) $\frac{2}{3}\pi a^3$ tür.



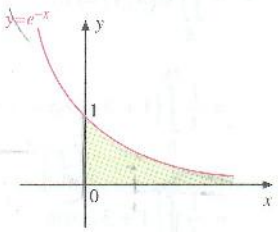
$G(\bar{x}, \bar{y})$ ağırlık merkezinin y eksenine olan uzaklığı $\bar{x}$ olduğundan

$$V = 2\pi\bar{x}.A \Rightarrow \frac{2}{3}\pi a^3 2\pi\bar{x}.\frac{1}{4}\pi a^2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

bulunur. Benzer şekilde $\bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$ olarak bulunur.

5. $\sigma(x, y) = k$ olsun.

$$M = \int_0^{\infty}\int_0^{e^{-x}} k\,dy\,dx = k\int_0^{\infty} e^{-x}dx = k.\lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-x}dx = k\lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^{e^{-x}}dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx$$



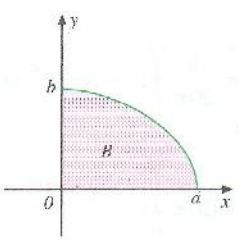
$$= -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 0 + 1 = 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{k}\int_0^{\infty}\int_0^{e^{-x}} ky\,dy\,dx = \int_0^{\infty}\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{e^{-x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

bulunur. Ağırlık merkezi $G\left(1, \frac{1}{4}\right)$ noktasıdır.

6. Elipsin alanı πab olduğundan B bölgesinin alanı $\frac{1}{4}\pi ab$ dir.

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi ab}\int_0^{a}\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx = \frac{4}{\pi ab}\int_0^{a} xy\Big|_a^{b\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{4}{\pi ab}\int_0^{a} x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4}{\pi a^2}\int_0^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$



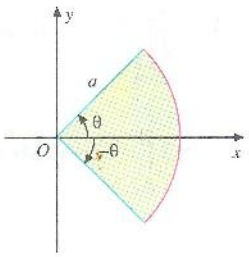
$$= \frac{4\pi}{\pi a^2}\left[-\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}.\frac{2}{3}\right]\Big|_0^{a} = \frac{4}{\pi a^2}.\frac{1}{3}a^3 = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\bar{y}=\frac{4}{\pi ab}\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx \quad \frac{4}{\pi ab}\int_0^a \frac{1}{2}.y^2\Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\frac{2}{\pi ab}.\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx$$

$$=\frac{2b}{\pi a^3}\left(a^2x-\frac{1}{3}.x^3\right)\Big|_0^a=\frac{2b}{\pi a^3}\left(\frac{2}{3}a^3\right)=\frac{4b}{3\pi}$$

Ağırlık merkezi $\left(\frac{4a}{3\pi}\,,\,\frac{4b}{3\pi}\right)$ noktasıdır.

7. Çember parçasının kutupsal denklemi $r=a,\ -\theta\le\varphi\le\theta$ dir.



$$A=\int_{-\theta}^{\theta}\int_0^a r\,dr\,d\varphi=\int_{-\theta}^{\theta}\frac{r^2}{2}\Big|_0^a d\varphi=\frac{a^2}{2}2\theta=a^2\theta$$

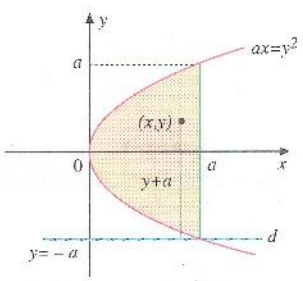
olur.

$$\bar{x}=\frac{1}{a^2\theta}-\int_{-\theta}^{\theta}\int_0^a r\cos\varphi\,.r\,dr\,d\varphi=\frac{a^3}{3}.\frac{1}{a^2\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\cos\varphi d\varphi=\frac{a}{3\theta}\sin\varphi\,\Big|_{-\theta}^{\theta}=\frac{2a.\sin\theta}{3\theta}$$

olur. Levha homogen ve x eksenine göre simetrik olduğundan $\bar{y}=0$ dır.

8. B bölgesinde alınan bir $P(x,y)$ noktasının

$y=-a$ doğrusuna olan uzaklığı $y+a$ kadardır.

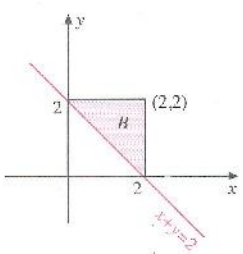


$$I_d=\iint_B (y+a)^2\,dx\,dy=\int_{-a}^{a}\int_{y^2/a}^{a}(y+a)^2\,dx\,dy=\int_{-a}^{a}(y+a)^2\,x\Big|_{y^2/a}^{a}\,dy$$

$$=\int_{-a}^{a}(y+a)^2\left(a-\frac{y^2}{a}\right)dy=\int_{-a}^{a}\left(-\frac{y^4}{a}+a^3\right)dy=\left(-\frac{y^5}{5a}+a^3y\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{8}{5}a^4$$

9. $$I_x=\iint_B y^2\,dx\,dy=\int_0^2\int_{2-x}^{2}y^2\,dy\,dx=\int_0^2\frac{1}{3}.y^3\Big|_{2-x}^{2}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^2\left[8-(2-x)^3\right]dx$$

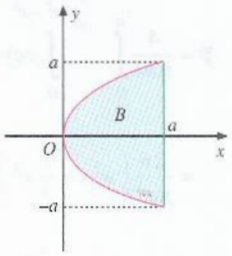
$$=\frac{1}{3}\left[8.x+\frac{1}{4}(2-x)^4\right]\Big|_0^2=\frac{1}{3}.12=4$$



10. $I_0 = \iint_B \left(x^2+y^2\right)dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{y^2/a}^{a}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right)\Big|_{y^2/a}^{a}dy$

$= \int_{-a}^{a}\left(\frac{a^3}{3}+ay^2-\frac{y^6}{3a^3}-\frac{y^4}{a}\right)dy = \left(\frac{1}{3}a^3y+\frac{1}{3}ay^3-\frac{1}{21a^3}y^7-\frac{1}{5a}y^5\right)\Big|_{-a}^{a}$

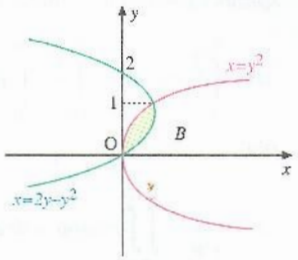
$= 2\left(\frac{1}{3}a^4+\frac{1}{3}a^4-\frac{1}{21}a^4-\frac{1}{5}a^4\right) = \frac{88}{105}a^4.$



11. $x = y^2,\ x = 2y - y^2 \Rightarrow y^2 = 2y - y^2 \Rightarrow y = 0 \vee y = 1$

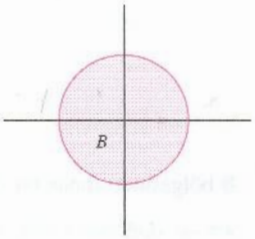
$I_x = \iint_B y^2.(1+y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{y^2}^{2y-y^2} y^2(1+y)\,dx\,dy = \int_0^1 y^2(1+y)\left(2y-2y^2\right)dy$

$= 2\int_0^1 y^3\left(1-y^2\right)dy = 2\int_0^1\left(y^3-y^5\right)dy = 2\left(\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{6}y^6\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$



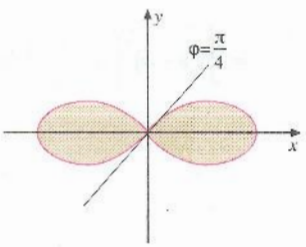
12. Daire içinde alınan bir (x, y) noktasının daire merkezine olan uzaklığı $\sqrt{x^2+y^2}$ dir. Buna göre

$I_0 = \iint_B \left(x^2+y^2\right)dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2.r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^a d\varphi = \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{a^4}{4}.2\pi = \frac{\pi}{2}a^4$



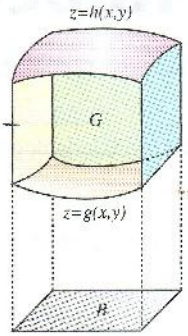
13. $I_0 = 2\int_0^{\pi}\int_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} r^2.r\,dr\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}16\cos^2 2\varphi\,d\varphi$

$= 8\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)d\varphi = 4\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = 4\pi$



ÜÇ KATLI İNTEGRALLER

ÜÇ KATLI İNTEGRALLERİN HESABI



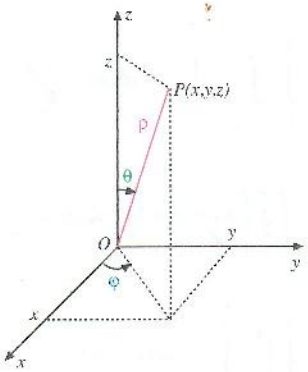
Üç boyutlu uzaydaki bir G bölgesi alttan $z = g(x,y)$, üstten $z = h(x, y)$ yüzeyleri yandan da bir silindirik yüzey ile sınırlandırılmış olsun. Bu bölgenin xoy düzlemi üzerindeki dik izdüşümü B ise

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_B \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y)\,dz \right] dx\,dy$$

dir.

ÜÇ KATLI İNTEGRALLERDE BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

KÜRESEL KOORDİNATLAR



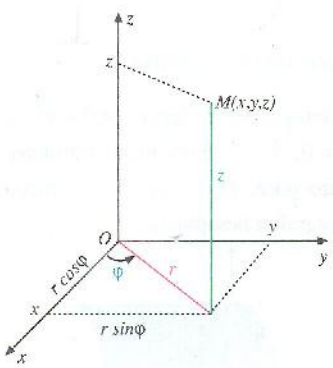
$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$

$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$ $\qquad J = \rho^2 \sin\theta$

$z = \rho \cos\theta$

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D F(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2 |\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

SİLİNDİRİK KOORDİNATLAR



$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$ $\qquad J = r$

$z = z$

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dz\,dr\,d\varphi$$

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

PROBLEMLER

- Üç Katlı İntegraller
- Üç Katlı İntegrallerde Bölge Dönüşümleri

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int_{-1}^{1}\int_{2}^{3}\int_{0}^{1} y(x+z)\,dz\,dy\,dx = \frac{5}{2}$

(b) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{2} dx\,dy\,dz = 1$

(c) $\int_{1}^{e}\int_{1}^{e}\int_{1}^{e} \frac{dx\,dy\,dz}{xyz} = 1$

(d) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{2-x}\int_{0}^{2-x-y} dz\,dy\,dx = \frac{7}{6}$

(e) $\int_{1}^{e}\int_{1}^{e}\int_{1}^{e} \ln x\,\ln y\,\ln z\,dz\,dy\,dx = 1$

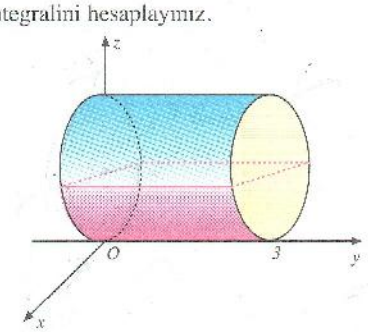
(f) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xyz\,dz\,dy\,dx = \frac{3}{8}$

2. B integrasyon bölgesi, koordinat düzlemleri ile $x + y + z = 1$ düzlemi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$\iiint_B x^2\,dx\,dy\,dz$$

integralini hesaplayınız.

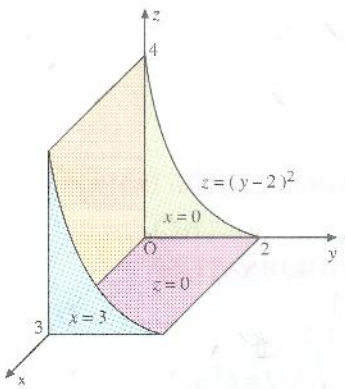
3. B integrasyon bölgesi $z = 2 - x^2$ ve $z = x^2$ silindirleri ile $y = 0$, $y = 3$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre, $f(x, y, z) = x + y$ fonksiyonunun B üzerindeki integralini hesaplayınız.



4. İntegrasyon bölgesi $z = (y-2)^2$ silindiri, $x = 3$ düzlemi ve koordinat düzlemleri tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I = \iiint dx\,dy\,dz$$

integralini hesaplayınız.



5. $I = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{y^2} dz\,dy\,dx$ integrali veriliyor.

(a) İntegrasyon bölgesini çiziniz.

(b) İntegralin sınırlarını, diferensiyellerin sırasını gözönüne alarak,

$$\iiint dz\,dx\,dy \quad ve \quad \iiint dy\,dz\,dx$$

integralleri için yazınız.

6. Aşağıdaki integralleri, integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

(a) $\int_{0}^{4}\int_{0}^{1}\int_{2y}^{2} \frac{4\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$

(b) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{2y} 12\,x\,ze^{z^2}\,dy\,dx\,dz$

7. $f(x, y, z) = z$ fonksiyonunun, $z = 0$ ve $z = \sqrt{4 - y^2 - x^2}$ yüzeyleri tarafından sınırlanan bölge üzerindeki integralini hesaplayınız.

8. Alttan $z = 3$ düzlemi, üstten $z = x^2 + y^2 + 4$ paraboloidi, yandan $x^2 + y^2 = 1$ silindiri tarafından sınırlanan bölge üzerinde, $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunun integralini hesaplayınız.

9. Küresel koordinatlara geçerek

$$I = \int_{-a}^{a} \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dz\, dy\, dx$$

integralini hesaplayınız.

10. G integrasyon bölgesi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidinin iç bölgesi olduğuna göre

$$\iiint_G x^2\, dx\, dy\, dz$$

integralini hesaplayınız.

11. G bölgesi $z^2 = \frac{h^2}{r^2}\left(x^2 + y^2\right)$ konisinin üst yarısı ile $z = h$ düzlemi arasındaki bölge olduğuna göre

$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi r^2 h^2}{4}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

12. G integrasyon bölgesi, $x^2 + y^2 + z^2 = x$ küresinin iç bölgesi olduğuna göre

$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{10}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

13. G bölgesi, üstten $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ küresi, alttan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$\iiint_G dx\, dy\, dz = \pi a^3$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

14. G bölgesi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin iç bölgesi olduğuna göre

$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \pi a^4$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

15. G integrasyon bölgesi, $z = 0$ düzlemi ile $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidinin üst yarısı tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre, $f(x, y, z) = z$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun G üzerindeki integralini hesaplayınız.

16. Silindirik koordinatlara geçerek

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$$

integralini hesaplayınız.

17. Silindirik koordinatlara geçerek

$$\int_0^{2a} \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$$

integralini hesaplayınız.

18. G bölgesi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ kürelerinin iç bölgelerinde kalan ortak bölge olduğuna göre

$$\iiint_G z^2\, dx\, dy\, dz$$

integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1.

(a) $\int_{-1}^{1}\int_{2}^{3}\int_{0}^{1} y(x+z)\,dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{2}^{3}\left(xyz+\frac{1}{2}yz^2\right)\Big|_0^1 dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{2}^{3}\left(xy+\frac{1}{2}y\right)dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{4}y^2\right)\Big|_2^3 dx$

$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x+\frac{5}{4}\right)dx = \left(\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{4}x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{5}{2}-\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2}.$

(b) $I = \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-z} x\,|_0^2\,dy\,dz = 2\int_0^1\int_0^{1-z} dy\,dz = 2\int_0^1 y\,\Big|_0^{1-z} dz = 2\int_0^1 (1-z)dz = 2\left(z-\frac{1}{2}z\right)\Big|_0^1 = 1$

(c) $I = \int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{dx\,dy\,dz}{xyz} = \int_1^e\int_1^e \ln x\frac{dy\,dz}{yz} = \int_1^e\int_1^e \frac{dy\,dz}{yz} = \int_1^e \ln y\,\Big|_1^e \frac{dz}{z} = \int_1^e \frac{dz}{z} = \ln z\,\Big|_1^e = 1$

(d) $I = \int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{2-x} z\,\Big|_0^{2-x-y} dy\,dx = \int_0^1\int_0^{2-x}(2-x-y)dy\,dx = \int_0^1\left(2y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2-x} dx$

$= \int_0^1\left[4-4x+x^2-\frac{1}{2}(2-x)^2\right]dx = \left(4x-2x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}(2-x^3)\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{6}$

(e) $\int \ln z\,dz = z\ln z - z$ olduğundan

$I = \int_1^e\int_1^e \ln y\ln z\left(x\ln x\,\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx\right)dy\,dz = \int_1^e\int_1^e (e-e+1)\ln y\ln z\,dy\,dz = \int_1^e\left\{y\ln y\,\Big|_1^e - \int_1^e y\frac{1}{y}dy\right\}dt$

$= \int_1^e \ln z\,dz = z\ln z\,\Big|_1^e - \int_1^e z\frac{1}{z}dz = e-e+1 = 1$

(f) $I = \int_0^1\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xyz\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{2}z^2\,|_{\sqrt{x^2+y^2}}^2\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1\left\{2xy-\frac{xy(x^2+y^2)}{2}\right\}dy\,dx = \int_0^1 xy^2-\frac{x^3y^2}{4}-\frac{xy^4}{8}\,\Big|_0^1 dx$

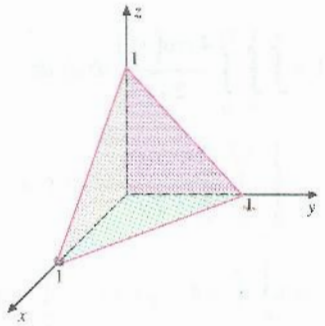
$= \int_0^1\left\{x-\frac{x^3}{4}-\frac{x}{8}\right\}dx = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{16}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16} = \frac{3}{8}$

2. $$I=\iiint_G x^2\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x^2\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x} x^2 z\,\Big|_0^{1-x-y}\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x} x^2(1-x-y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left(\left(x^2-x^3\right)y-\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left[\left(x^2-x^3\right)(1-x)-\frac{1}{2}x^2(1-x)^2\right]dx$$

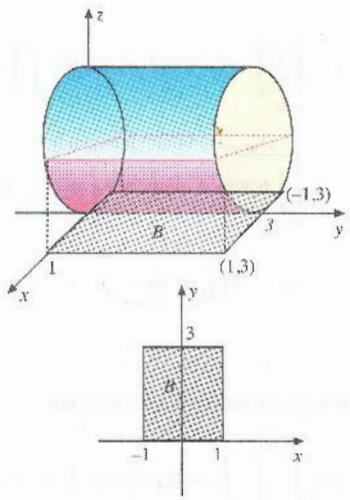
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2\right)=\left(\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{60}$$



3. $$I=\int_{-1}^{1}\int_0^3\int_{x^2}^{2-x^2}(x+y)\,dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_0^3(x+y)z\,\Big|_{x^2}^{2-x^2}dy\,dx$$

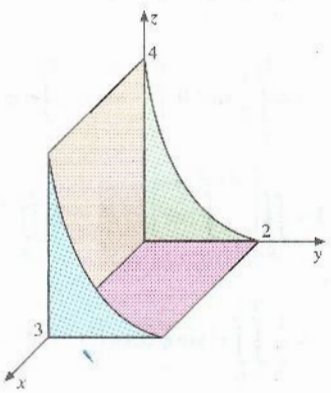
$$=\int_{-1}^{1}\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\left(2-2x^2\right)\Big|_0^3\,dx=\int_{-1}^{1}\left(3x+\frac{9}{2}\right)\left(2-2x^2\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}6x-6x^3+9-9x^2=\left(3x^2-\frac{3}{2}x^4+9\frac{x}{2}-3x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=12$$



4. $$I=\int_0^3\int_0^2\int_0^{(y-2)^2}dz\,dy\,dx=\int_0^3\int_0^2(y-2)^2\,dy\,dx$$

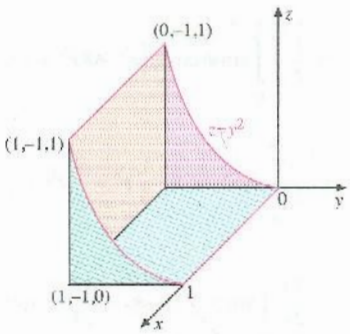
$$=\int_0^3\frac{1}{3}(y-2)^3\,\Big|_0^2\,dx=\int_0^3\frac{8}{3}\,dx=\frac{8}{3}x\,\Big|_0^3=8.$$



5. $$I=\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^{y^2}dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^0\int_0^1\int_0^{y^2}dz\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_{-1}^{-\sqrt{z}}dy\,dz\,dx$$



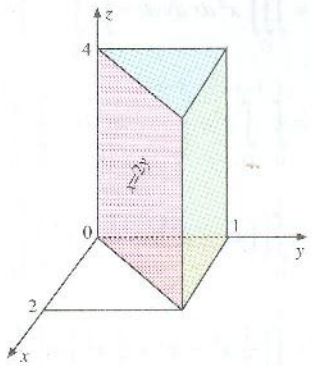
6.

(a) $$I=\int_0^4\int_0^1\int_0^{2y}\frac{4\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^1\int_x^{x/2}\int_0^4\frac{4\cos\left(x^2\right)}{2\sqrt{z}}\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{x/2}4\cos\left(x^2\right)\sqrt{z}\,\Big|_0^4\,dy\,dx$$

$$=8\int_0^1\int_0^{x/2}\cos\left(x^2\right)dy\,dx=8\int_0^1\cos\left(x^2\right).y\,\Big|_0^{x/2}dx=8\int_0^1\cos\left(x^2\right).\frac{x}{2}\,dx$$

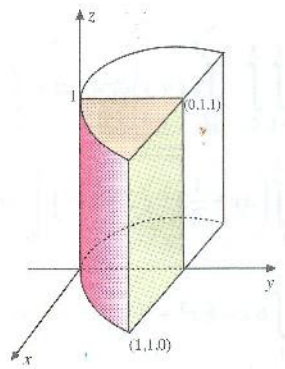
$$=2\int_0^1\cos\left(x^2\right)2x\,dx=2\sin\left(x^2\right)\Big|_0^1=2\sin 1$$



(b) $$I=\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12\,x\,z\,e^{z y^2}\,dy\,dx\,dz=\int_0^1\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}}12.x\,z\,e^{z y^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^1\int_0^1 6\,y\,z\,e^{z y^2}\,dy\,dz=3\int_0^1 e^{z y^2}\,\Big|_0^1\,dz=3\int_0^1\left(e^z-1\right)dz$$

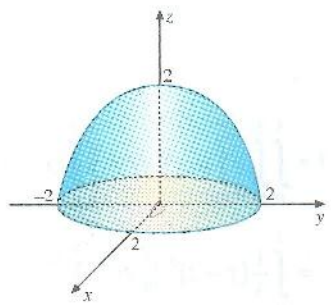
$$=3\left(e^z-z\right)\Big|_0^1=3(e-1-1)=3(e-2)$$



7. Küresel koordinatlara geçilerek

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^2\cos\theta.\rho^2\left|\sin\theta\right|d\rho\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,\frac{1}{4}\rho^4\,\Big|_0^2\,d\theta\,d\varphi$$

$$=4\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin^2\theta\,\Big|_0^{\pi/2}d\varphi=2\int_0^{2\pi}d\varphi=4\pi\quad\text{bulunur.}$$



8.

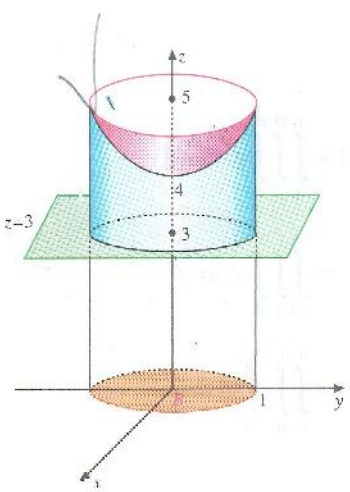
$$I=\iint_B\left[\int_3^{x^2+y^2+4}z\,dz\right].xy\,dx\,dy=\iint_B\frac{xy}{2}\left[\left(x^2+y^2+4\right)^2-9\right]dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin\varphi\cos\varphi\left[\left(r^2+4^2-9\right)\right]r\,dr\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1\sin\varphi\cos\varphi\left(r^7+8r^5+7r^3\right)dr\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{8}r^8+\frac{4}{3}r^6+\frac{7}{4}r^4\right)\Big|_0^1\,d\varphi$$

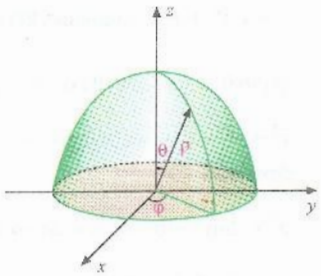
$$=\frac{77}{24}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{77}{24}.\frac{1}{2}\sin^2\varphi\,\Big|_0^{2\pi}=0.$$



9. $$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\left(\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi\right)\rho^2\left|\sin\theta\right|d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\rho^4\sin^3\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)d\varphi=\frac{2a^5}{15}.\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{15}\pi a^5.$$



10. $\frac{x}{a}=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{z}{c}=\rho\cos\theta\Rightarrow J=abc\rho^2\sin\theta$

$$I=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1}a^2\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi abc\rho^2\left|\sin\theta\right|d\rho\,d\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^3bc}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\varphi\,d\theta\,d\varphi=\frac{a^3bc}{5}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta$$

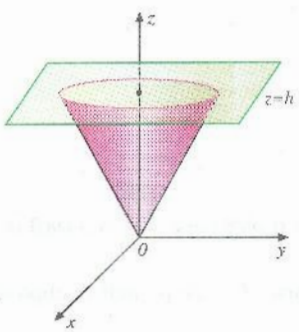
$$=\frac{a^3bc}{5}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\left(\sin\varphi-\sin\theta\cos^2\theta d\theta\right)\right)$$

$$=\frac{a^3bc}{5}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\varphi}{4}\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{a^3bc}{5}(\pi)(2)=2\pi\frac{a^3bc}{5}$$

11. $$I=\iint_{z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h}z\,dz\,dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_{z=\frac{h}{R}r}^{h}zrdz\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left(h^2-\frac{h^2}{R^2}r^2\right)r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{h^2r^2}{2}-\frac{h^2r^4}{R^2\,4}-\frac{h^2}{R^2}\frac{r^4}{4}\Big|_0^{R}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}2\pi\left(\frac{h^2R^2}{2}-\frac{h^2R^2}{4}\right)=\pi\frac{h^2R^2}{4}$$

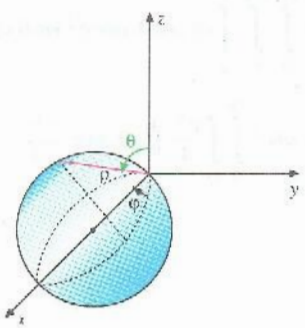


12. Küresel koordinatlara geçilirse, küre denklemi olarak $\rho=\cos\theta$ bulunur.

$$I=\int_{\varphi=-\pi}^{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\cos\theta}\rho.\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{4}.2\pi.\frac{1}{5}=\frac{\pi}{10}$$

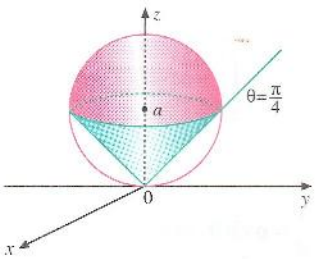
bulunur.



13. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin küresel koordinatlardaki denklemi

$\rho\cos\theta = \sqrt{\rho^2 \sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\theta}\rho\cos\theta = \rho\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ küresinin küresel koordinatlardaki denklemi



$\rho^2 = 2a\rho\cos\theta \Rightarrow \rho = 2a\cos\theta$ olur. Buna göre,

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{2a\cos\theta} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 8a^3\cos^3\theta\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= -\frac{8a^3}{3}.2\pi\left(\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = -\frac{8a^3}{3}2\pi\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right) = \pi a^3$$

14. Küresel koordinatlara geçilirse

$$I = \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho.\rho^2|\sin\theta|\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

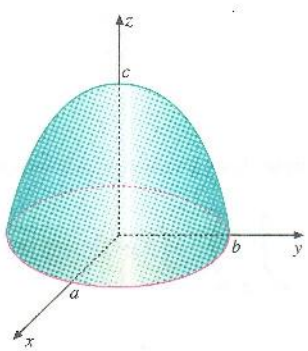
$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} -\cos\theta\,|_0^{\pi}\, d\varphi = \frac{a^4}{4}.2\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a^4}{4}.2.2 = a^4$$

bulunur.

15. $\frac{x}{a} = \rho\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{y}{b} = \rho\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{z}{c} = \rho\cos\theta$

denirse $J = abc\,\rho^2\sin\theta$ ve elipsoidin denklemi $\rho = 1$

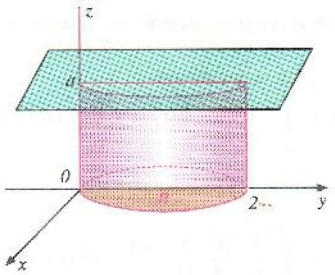
olur. Buna göre



$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} c\rho\cos\theta.abc\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= abc^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 d\theta\, d\varphi = \frac{abc^2}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} d\theta\, d\varphi = \frac{abc^2}{4}.\frac{\pi}{2}.2\pi = \frac{1}{4}\pi abc^2.$$

16. $x = \sqrt{2y - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y$ çemberinin kutupsal koordinatlardaki denklemi $r^2 = 2r\sin\varphi \Rightarrow r = 2\sin\varphi$ olur.

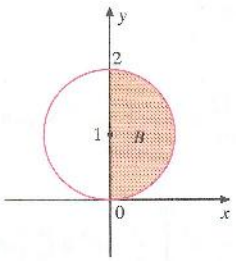


$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sin\varphi}\int_0^{a} zr^2 \cdot r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sin\varphi} \frac{1}{2}z^2\Big|_0^{a} r^2\,dr\,d\varphi$$

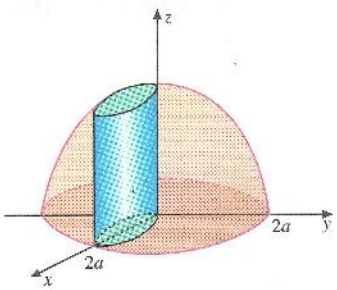
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{4}{3}a^2\left(-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{3}a^2\left(+1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}a^2$$



17. İntegrasyon bölgesi, üstten $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ küresi, alttan $z = 0$ düzlemi ve yandan da $x^2 + y^2 = 2ax$ silindiri tarafından çevrili bölgedir.

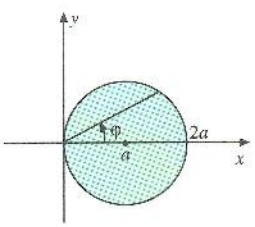


$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

dönüşümü yapılırsa üst yarıkürenin denklemi $z = \sqrt{4a^2 - r^2}$, silindirin denklemi $r^2 = 2ar\cos\varphi \Rightarrow r = 2a\cos\varphi$ olur. Buna göre

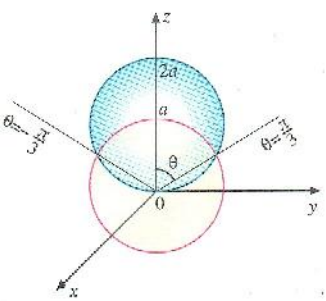


$$I = \int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\varphi}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\varphi} r\sqrt{4a^2-r^2}\,dr\,d\varphi = -\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4a^2-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3\varphi - 1\right)d\varphi = -\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi + \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 0 + \frac{8a^3}{3}.\pi = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

18. Kutupsal koordinatlara geçilirse, kürelerin denklemleri



$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow \rho^2 = a^2 \Rightarrow \rho = a$

$x^2 + y^2 + z^2 = 2az \Rightarrow \rho^2 = 2a\rho\cos\theta \Rightarrow \rho = 2a\cos\theta$

olur.

$\rho = a$ ve $\rho = 2a\cos\theta \Rightarrow a = 2a\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$ olur.

$$I = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} \rho^2\cos^2\theta\,\rho^2|\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{a} \rho^2\cos^2\theta\,\rho^2|\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi/2} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^{2a\cos\theta}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi + \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{32}{5}a^5\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^7\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi + \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{32}{5}a^5\int_0^{2\pi}\frac{-1}{8}\cos^8\theta\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}d\varphi + \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi/3}d\varphi$$

$$= \frac{4}{5}a^5\left(\frac{1}{256}\right).2\pi + \frac{a^5}{15}\left(-\frac{1}{8}+1\right)2\pi = \pi a^5\left(\frac{1}{160}+\frac{7}{60}\right) = \frac{59}{480}\pi a^5.$$

ÜÇ KATLI İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

HACİM HESABI

G nin hacmi V ise

$$V = \iiint_G dx\,dy\,dz$$

olur.

Eğer, hacim küresel koordinatlarda hesaplanacaksa

$$V = \iiint_G \rho^2 \left| \sin\theta \right| d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

olacaktır.

Eğer silindirik koordinatlar kullanılarak hacim hesaplanacaksa

$$V = \iiint_G r\,dz\,dr\,d\varphi$$

bağıntısını kullanmak gerekir.

AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_G x\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_G y\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_G z\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Eğer cisim homogen, yani $\sigma(x, y, z)$ sabitse yukarıdaki ifadeler

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint_G x\,dx\,dy\,dz$$

$$\bar{y} = \frac{1}{V}\iiint_G y\,dx\,dy\,dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_G z\,dx\,dy\,dz$$

şeklini alırlar.

KÜTLE HESABI

(x, y, z) noktasındaki yoğunluk $\sigma(x, y, z)$ ise

$$M = \iiint_G \sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

olur.

EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESABI

Koordinat eksenlerine göre eylemsizlik momentleri

$$I_x = \iiint_G \left(y^2 + z^2\right)\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint_G \left(x^2 + z^2\right)\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint_G \left(x^2 + y^2\right)\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Orijine göre eylemsizlik momenti

$$I_O = \iiint_G \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Koordinat düzlemlerine göre eylemsizlik momentleri, sırasıyla,

$$I_{xy} = \iiint_G z^2\,\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{xz} = \iiint_G y^2\,\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2\,\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

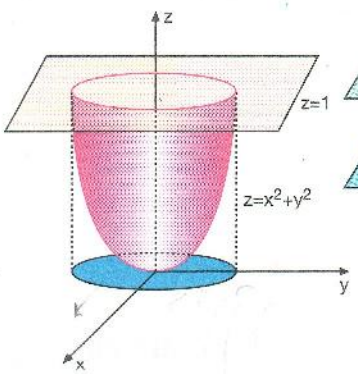
olacaktır.

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

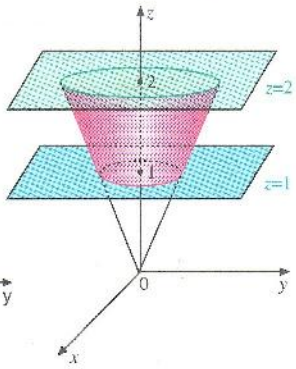
byns

PROBLEMLER

1. $x^2 + y^2 = z$ paraboloidi ile $z = 1$ düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.



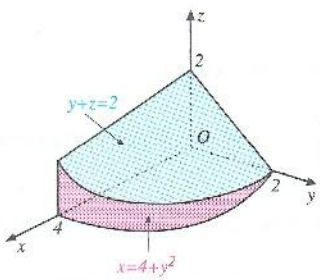
Problem 1 deki bölge



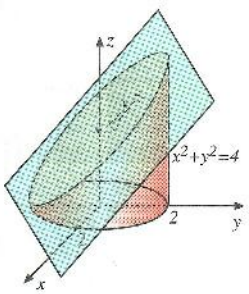
Problem 2 deki bölge

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi ile $z = 1$, $z = 2$ düzlemleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

3. Birinci bölgede, koordinat düzlemleri, $y + z = 2$ düzlemi ve $x = 4 + y^2$ silindir tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.



Problem 3 teki bölge



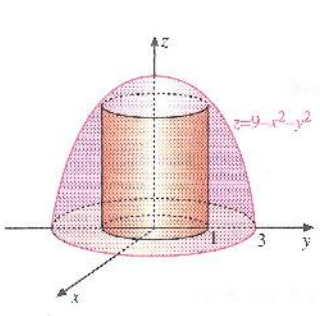
Problem 4 teki bölge

4. $x^2 + y^2 = 4$ silindiri ile $z = 0$ ve $z = 4 - x$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

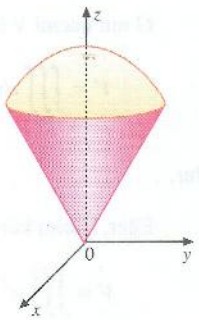
5. $z = x^2 + y^2$ paraboloidi, $z = 0$ düzlemi ve $x^2 + y^2 = 1$ silindiri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

6. Alttan xOy düzlemi, üstten $z = 9 - x^2 - y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan ve $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin dışında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

7.



Problem 6 daki bölge



Problem 7 deki bölge

Alttan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi, üstten $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ küresi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

8. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küreleri arasına yerleştirilen bir cismin yoğunluğu, her noktada, o noktanın küre merkezine olan uzaklığı ile doğru orantılıdır. Bu cismin kütlesini bulunuz.

9. Üstten $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresi, alttan $z = x^2 + y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan homogen cismin kütlesini bulunuz.

10. $x = y^2$ silindiri $z = 0$, $z = 3$ ve $x = 4$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen cismin ağırlık merkezini bulunuz.

11. $x^2 + y^2 = 4$ silindiriyle $z = 0$, $z = 4$ düzlemleri tarafından sınırlanan cismin yoğunluğu (x,y,z) noktasında $\sigma(x, y, z) = 20 - z^2$ dir. Bu cismin ağırlık merkezini bulunuz.

12. Yoğunluğu 1 olan, $x + y + z = 2$ düzlemi, $x^2 + y^2 = 2$ silindiri ve $z = 0$ düzlemi tarafından sınırlanan cisin Oz- eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

13. a yarıçaplı küre şeklindeki bir cismin her noktadaki yoğunluğu, o noktanın küre merkezine olan uzaklığının karesi ile ters orantılıdır. Küre yüzeyi üzerindeki noktalarda yoğunluk, küre yarıçapına eşit olduğuna göre, cismin kütlesini bulunuz.

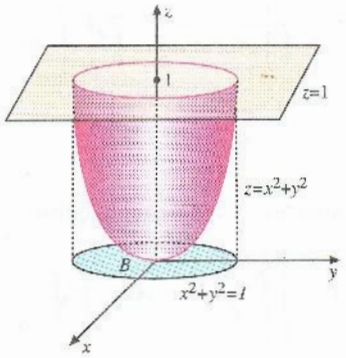
14. Üstten $\rho = 2$ küresi alttan $z = 1$ düzlemi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. $V=\iiint_B \int_{x^2+y^2}^{1} dz\,dy\,dx=\iint_B \left(1-x^2-y^2\right)dx\,dy$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-r^2\right)r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r-r^3\right)dr\,d\varphi$

$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^1 d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{1}{4}.2\pi=\frac{\pi}{2}.$

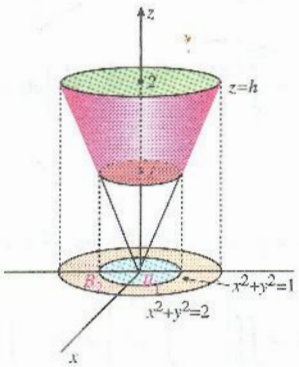


2. $V=\iint_{B_1}\left(\int_1^2 dz\right)dx\,dy+\iint_{B_2}\left[\int_{x^2+y^2}^{2} dz\right]dx\,dy$

$=\iint_{B_1} dx\,dy+\iint_{B_2}\left(2-x^2-y^2\right)dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\left(2-r^2\right)r\,dr\,d\varphi$

$=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\varphi+\int_0^{2\pi}\left(r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\varphi$

$=\frac{1}{2}.2\pi+\frac{1}{4}.2\pi=\frac{3\pi}{2}$



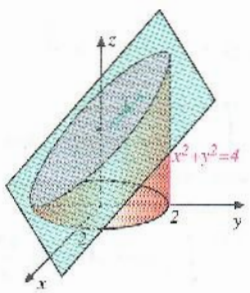
3. $V=\int_0^2\int_0^{2-z}\int_0^{4+y^2} dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^{2-z}\left(4+y^2\right)dy\,dz=\int_0^2\left(4y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^{2-z} dz$

$=\int_0^2\left[4(2-z)+\frac{1}{3}(2-z)^3\right]dz=\left[-2(2-z)^2-\frac{1}{12}(2-z)^4\right]\Big|_0^2=\frac{20}{3}\,br^3.$

4. $V=\iint_B \int_0^{4-x} dz\,dx\,dy=\iint_B (4-x)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r\cos\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$

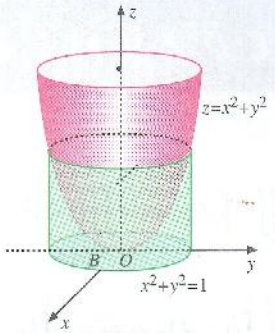
$=\int_0^{2\pi}\left(2r^2-\frac{r^3}{3}\cos\varphi\right)\Big|_0^2 d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(8-\frac{8}{3}\cos\varphi\right)d\varphi=\left(8\varphi-\frac{8}{3}\sin\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}$

$=16\pi.$



5. $V = \iiint_B \int_0^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx = \iint_B \left(x^2+y^2\right) dx\,dy$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 . r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{4}.2\pi = \frac{\pi}{2}.$

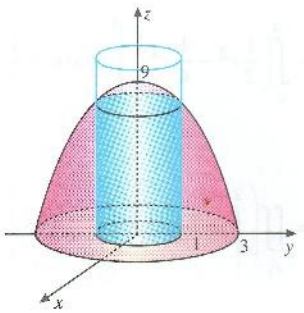


6. Silindirik koordinatlara geçilirse

$V = \int_0^{2\pi}\int_1^3\int_0^{9-r^2} r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_1^3 z\Big|_0^{9-r^2} r\,dr\,d\varphi$

$= \int_0^{2\pi}\int_1^3 \left(9-r^2\right) r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_1^3 d\varphi$

$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} - \frac{9}{2} + \frac{1}{4}\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} 16\,d\varphi = 16.2\pi = 32\pi.$



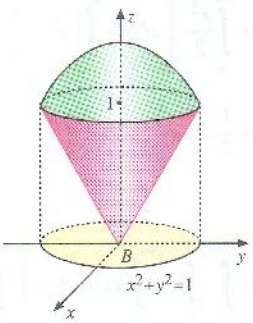
7. $x^2+y^2 = 2-x^2-y^2 \implies x^2+y^2 = 1$

$V = \iint_B \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz\right] dx\,dy = \iint_B \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{2-r^2} - r\right) r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[-\frac{1}{2}\left(2-r^2\right)^{1/2}(-2r) - r^2\right] dr\,d\varphi$

$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\left(2-r^2\right)^{3/2} - \frac{r^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right) d\varphi = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right).2\pi$

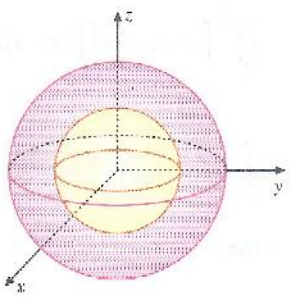
$= \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$



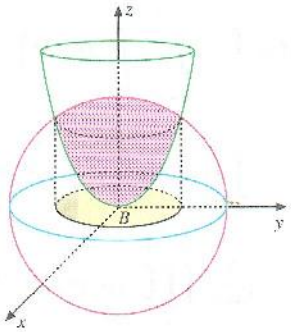
8. $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$M = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=1}^{2} k.\rho.\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho^4}{4}\Big|_1^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$= \frac{15k}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \frac{15}{4}k\int_0^{2\pi} -\cos\theta\Big|_0^{\pi} d\varphi = \frac{15}{4}k.2.2\pi = 15k\pi$



9. $\sigma(x, y, z) = k$ olsun. $x^2 + y^2 = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

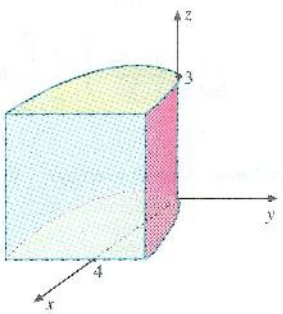


$$M = \iiint_B \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} k\,dz\,dy\,dx = \iint_B \left[\sqrt{1-x^2} - y^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right] dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{1-r^2} - r^2\right) r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{1-r^2} - r - r^3\right) dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{3/2} - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{12}.2\pi = \frac{\pi}{6}.$$

10. $\sigma = k$ olsun.

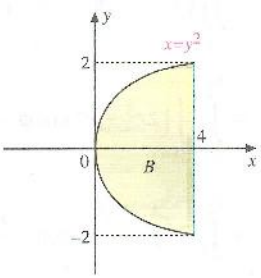


$$M = \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_0^3 k\,dz\,dx\,dy = 3k\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} dx\,dy = 3k\int_{-2}^{2} x\Big|_{y^2}^{4} dy$$

$$= 3k\int_{-2}^{2}\left(4 - y^2\right)dy = 3k\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 3k.\frac{32}{3} = 32k$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint x\sigma\,dz\,dx\,dy = \frac{1}{32k}\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_0^3 kx\,dz\,dx\,dy = \frac{3}{32}\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} x\,dy\,dy$$

$$= \frac{3}{32}\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2}^{4} dy = \frac{3}{32}.\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(16 - y^4\right)dy = \frac{3}{64}\left(16y - \frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{6}{5}.$$



$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_0^3 ky\,dz\,dx\,dy = \frac{1}{32}\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} yz\Big|_0^3 dx\,dy = \frac{1}{32}\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} 3y\,dx\,dy$$

$$= \frac{3}{32}\int_{-2}^{2} yx\Big|_{y^2}^{4} dy = \frac{3}{32}\int_{-2}^{2}\left(4y - y^3\right)dy = \frac{3}{32}.0 = 0.$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_0^3 kz\,dz\,dx\,dy = \frac{1}{32}\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^3 dx\,dy = \frac{9}{64}\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} dx\,dy$$

$$= \frac{9}{64}\int_{-2}^{2}\left(4 - y^2\right)dy = \frac{9}{32}\int_0^2\left(4 - y^2\right)dy = \frac{9}{32}\left(4y - y^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{9}{32}.\frac{16}{3} = \frac{3}{2}.$$

Ağırlık merkezi $\left(\frac{6}{5}, 0, \frac{3}{2}\right)$ noktasıdır.

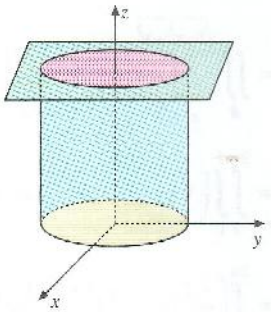
11.

$$M=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{4}\left(20-z^2\right)dz\,dy\,dx=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{0}^{4}\left(20-z^2\right)r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\left(20z-\frac{7^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{4}r\,dr\,d\varphi=\frac{176}{3}\int_{0}^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{2}d\varphi=\frac{352}{3}.2\pi=\frac{704}{3}\pi$$

$$\bar{x}=\frac{3}{704\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{0}^{4}r\cos\varphi\left(20-z^2\right)r\,dz\,dr\,d\varphi=\frac{3}{704\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\left(20z-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{4}r^2\cos\varphi\;dr\,d\varphi$$

$$=\frac{176}{704\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Bigg|_{0}^{4}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{3.176}{3.704\pi}.\frac{64}{3}\int_{0}^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=0.$$



Benzer şekilde $\bar{y}=0$ bulunur.

$$\bar{z}=\frac{3}{704\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{0}^{4}z\left(20z-z^2\right)r\,dz\,dr\,d\varphi=\frac{3}{704\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\left(\frac{20}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4\right)\Bigg|_{0}^{4}r\,dr\,d\varphi$$

$$=\frac{3}{704\pi}.\frac{17.64}{3}\int_{0}^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{2}d\varphi=\frac{3}{704\pi}.\frac{17.64}{3}.2.2\pi=\frac{34}{11}.$$

bulunur. Ağırlık merkezi $\left(0,0,\frac{34}{11}\right)$ dir.

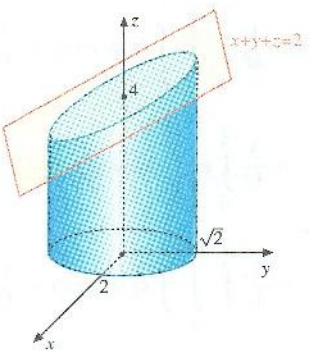
12. $I_z=\iint_B\left(x^2+y^2\right)(2-x-y)=\iint_B r^2.(2-r\cos\varphi-r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi$

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(2r^3-r^4\cos\varphi-r^4\sin\varphi\right)dr\,d\varphi$$

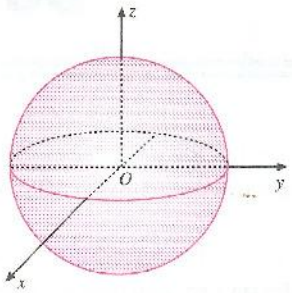
$$=\int_{0}^{2\pi}\left(2\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\cos\varphi-\frac{r^5}{5}\sin\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(2-\frac{4\sqrt{2}}{5}\cos\varphi-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=\left(2\varphi-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sin\varphi+\frac{4\sqrt{2}}{5}\cos\varphi\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=4\pi.$$



13. $\sigma(x,y,z)=\dfrac{k}{x^2+y^2+z^2}$ dir. Küre yüzeyi üzerinde $x^2+y^2+z^2=a^2$ olacağından $\dfrac{k}{a^2}=a \Rightarrow k=a^3$ tür. Bu durumda $k=a^3$ ve $\sigma(x,y,z)=\dfrac{a^3}{x^2+y^2+z^2}$ dir.



$$M=\iiint_G \sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_G \frac{a^3}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

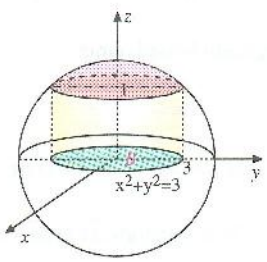
olur. Küresel koordinatlara geçilirse

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{a^3}{\rho^2}\rho^2\left|\sin\theta\right|d\rho\,d\theta\,d\varphi=a^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$=a^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho\Big|_0^{a}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=a^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=a^4\int_0^{2\pi}-\cos\theta\Big|_0^{\pi}d\varphi$$

$$=a^4\int_0^{2\pi}2\,d\varphi=a^4.2.2\pi=4\pi a^4 \text{ bulunur.}$$

14. $\rho=2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=4$ ve $z=1$ ise $x^2+y^2=3$ olur.



$$V=\iint_B\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dz\,dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-r^2}\,r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{3}}d\varphi$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[(4-3)^{3/4}-4^{3/2}\right]d\varphi$$

$$=\frac{7}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{7}{3}\cdot 2\pi=\frac{14}{3}\pi.$$

byns

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-3y=2$, $2x-3y=5$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

2. $y=x$, $y=2x$ doğrularıyla $xy=1$, $xy=2$ hiperbolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

3. Birinci bölgede $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=y^2$, $x=2y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

4. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ lemniskatı tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

5. B bölgesi, birinci bölgede $y=x$ doğrusuyla $x^4+x^2y^2=y^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre

$$I=\iint_B \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

integralini hesaplayınız.

6. $\int_0^2 (arc\ tan\ \pi x - arc\ tan\ x)\,dx$ integralini hesaplayınız.
(*YG*: Önce integrali iki katlı integral şeklinde yazınız.)

7. Hangi B bölgesi üzerinde

$$\iint_B \left(4-x^2-2y^2\right)dxdy$$

İntegrali maksimum değerini alır? Bu maksimum değeri hesaplayınız.

8. $a,b>0$ dır. xOy-düzlemi, $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ paraboloidi ve $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{x}{a}$ silindiri arasında kalan bölgenin hacmini hesaplayınız.

9. Yukarıdan $\rho=6\cos\theta$ küresi, alttan $\theta=\frac{\pi}{3}$ konisi tarafından sınırlanan cismin hacmini bulunuz.

10. $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresinin hacmini veren üç katlı integrali (*a*) kartezyen koordinatlarda (*b*) küresel koordinatlarda (*c*) silindirik koordinatlarda yazınız.

11. f, B üzerinde integrallenebilir olsun.

$$A=\frac{1}{AlanB}\iint_B f(x,y)dxdy$$

ifadesine f fonksiyonunun B üzerindeki avarajı (ortalama değeri) denir. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan fonksiyonların altlarına yazılı bölgeler üzerindeki ortalama değerini bulunuz.

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$,
$B=\{(x,y): 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$

(b) $f(x,y)=\sin(x+y)$
$B=\{(x,y): 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi\}$

(c) $f(x,y)=x^2+y^2$,
$B=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

(d) $f(x,y)=\frac{1}{x^3y}$,
$B=\{(x,y): e^{-2x}\le y\le e^{-x},\ x\ge 1\}$

12. $xy=1$, $xy=3$, $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=4$
hiperbolleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın orijine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidi tarafından sınırlanan bölge üzerinde
$\iiint\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$ integralini hesaplayınız.

14. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \left(x^2+y^2\right)dz\,dy\,dx$ integralini silindirik koordinatlara geçerek hesaplayınız.

15. $\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right) dz\,dy\,dx$ integralini

$u=\frac{2x-y}{2}$, $v=\frac{y}{2}$, $w=\frac{z}{3}$

dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

16. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidinin hacmini

$$\begin{cases} x=a\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=c\rho\cos\theta \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

17. $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2\,dz\,dr\,d\varphi$ integralini kartezyen ve küresel koordinatlara göre yazınız.

18. $\rho = 1 - cos\theta$ yüzeyi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

19. Alttan $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi, üstten $x^2+y^2+z^2=2z$ küresi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

20. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi ile $6z=x^2+y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

21. Üstten $x^2+y^2+z^2=4$ küresi, alttan $3z=x^2+y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

22. $x+z=1$, $y+2z=2$ ve koordinat düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

23. $x^2+y^2=1$ silindiri ile $z=0$, $z=-y$ düzlemleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.

24. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi ile $z=2$ düzlemi tarafından sınırlanan cismin yoğunluğu, her noktada, o noktanın xOy- düzlemine olan uzaklığı kadardır. Bu cismin kütlesini bulunuz.

25. $x^2+y^2=a^2$ silindiri ile $z=0$ ve $z=h$ düzlemleri tarafından sınırlanan cismin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu z olduğuna göre cismin kütlesini bulunuz.

26. Üstten $\rho = 2a\ cos\ \theta$ küresi, alttan $\theta=\frac{\pi}{6}$ konisi tarafından sınırlanan cismin yoğunluğu her noktasında, o noktanın xOy düzlemine olan uzaklığı kadardır. Bu cismin kütlesini bulunuz.

27. Birinci bölgede, koordinat düzlemleriyle $x+y+z=2$ düzlemi tarafından sınırlanan cismin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z) = 2x$ olduğuna göre kütlesini bulunuz.

28. $z=16-2x^2-2y^2$ ve $z=2x^2+2y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir cismin yoğunluğu $\sigma(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2}$ olduğuna göre kütlesini bulunuz.

29. $z=x^2+y^2$ paraboloidi, xOy– düzlemi ve $x^2+y^2=4$ silindiri tarafından sınırlanan homogen cismin kütlesini bulunuz.

30. Alttan $z=3\sqrt{x^2+y^2}$ konisi, üstten $z=1$ düzlemi tarafından sınırlanan homogen cismin ağırlık merkezini bulunuz.

31. $z=x^2+y^2$ ve $z=12-2x^2-2y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan homogen cismin ağırlık merkezini bulunuz.

32. Üstten $\rho = a$ küresi, alttan $\theta=\frac{\pi}{3}$ konisi tarafından sınırlanan homogen cismin ağırlık merkezini bulunuz.

33. Problem 32 verilen cismin z- eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

34. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ düzlemleri tarafından sınırlanan homogen cismin orijine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. $\left.\begin{aligned} x+y&=u \\ 2x-3y&=v \end{aligned}\right\}$ dönüşümü yapılırsa

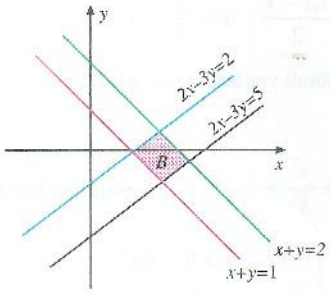
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}}=-\frac{1}{5}$$

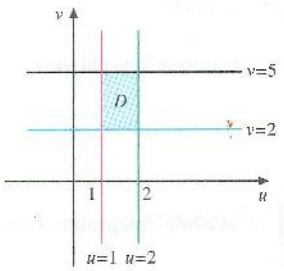
olacağından

$$A=\iint_B dxdy=\iint_D \frac{1}{5}dudv=\int_1^2\int_1^5 \frac{1}{5}dvdu$$

$$=\frac{1}{5}(2-1)(5-2)=\frac{3}{5}\ br^2$$

bulunur.





2. $\left.\begin{aligned} \frac{y}{x}&=u \\ xy&=v \end{aligned}\right\}$ dönüşümü yapılırsa B bölgesi

$u=1,\ u=2,\ v=1,\ v=2$

doğruları tarafından sınırlanan birim kareye dönüşür.

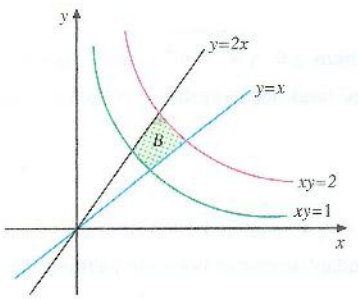
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\\ y & x\end{vmatrix}}=-\frac{1}{\frac{2y}{x}}=-\frac{1}{2u}$$

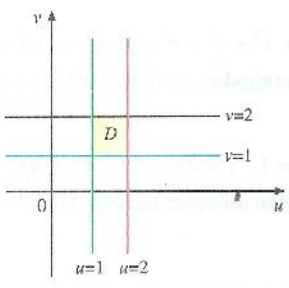
olur. Buna göre

$$A=\iint_B dxdy=\iint_D \frac{1}{2u}du\,dv=\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{2u}dudv=\int_1^2 \frac{1}{2}\ln u\,\Big|_1^2 dv$$

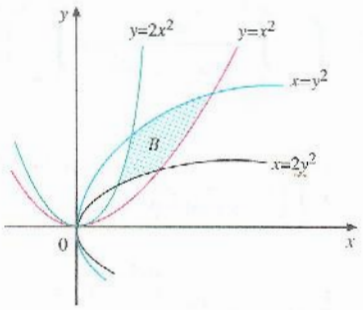
$$=\frac{1}{2}\ln 2\int_1^2 dv=\frac{1}{2}\ln 2\ \ br^2$$

olur.





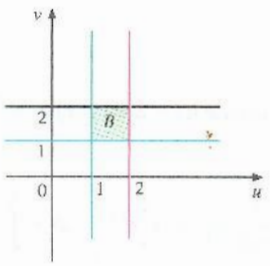
3. $\left.\begin{aligned} \frac{y}{x^2} &= u \\ \frac{x}{y^2} &= v \end{aligned}\right\}$ bölge dönüşümü yapılırsa, B bölgesi



$u=1,\ u=2,\ v=1,\ v=2$
doğruları tarafından sınırlanan D bölgesine dönüşür.

$$J=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{vmatrix}}=\frac{1}{3}=\frac{1}{x^2y^2}=\frac{1}{3}(xy)^2$$

Diğer taraftan $u.v=\frac{y}{x^2}.\frac{x}{y^2}=\frac{1}{xy}$ olacağından $J=\frac{1}{3u^2v^2}$ dir. Buna göre

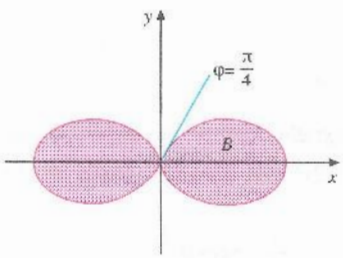


$$A=\iint_B dx\,dy=\iint_D \frac{0}{3u^2v^2}\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{u^2}.\frac{1}{v^2}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{v^2}\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^2 dv=0.\frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{v^2}dv=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{v}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{6}.\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

olur.

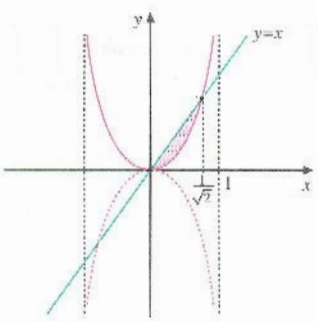
4. $\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}$ dönüşümü yapılıra $r^2=a^2\cos 2\varphi$ lemniskat denklemi elde edilir.



$$\frac{A}{4}=\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{a^2}{2}.\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{4}\Rightarrow A=a^2\ \text{olur.}$$

5. $x^4+x^2y^2=y^2 \Rightarrow x^2(x^2+y^2)=y^2 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi\,.\,r^2=r^2\sin^2\varphi \Rightarrow r^2=\tan^2\varphi \Rightarrow r=|\tan\varphi|.$



$x^4+x^2y^2=y^2 \wedge y=x$ ise

$x^4+x^2.x^2=x^2 \Rightarrow x^2(2x^2-1)=0$

$x_1=x_2=0,\ x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x_4=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}^{x}\frac{dy\,dx}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\tan\varphi}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\left(1+r^2\right)^2}=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/4}\frac{2r\,dr\,d\varphi}{\left(1+r^2\right)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}-\frac{1}{1+r^2}\Bigg|_0^{\tan\varphi}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{1}{1+\tan^2\varphi}\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi+2}{16}$$

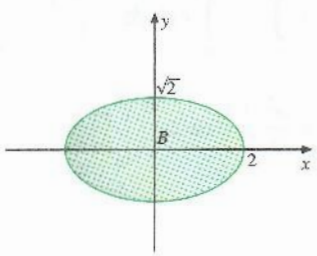
6. $$I=\int_0^2\left(\arctan\pi x-\arctan x\right)dx=\int_0^2\int_1^{\pi}\frac{x}{1+(xt)^2}\,dt\,dx=\int_1^{\pi}\frac{1}{2t^2}\int_0^2\frac{2t^2x}{1+x^2t^2}\,dx\,dt$$

$$=\int_1^{\pi}\frac{1}{2t^2}\ln\left(1+x^2t^2\right)\Bigg|_0^2dt=\int_1^{\pi}\frac{\ln\left(1+4t^2\right)}{2t^2}=-\frac{1}{2t}\ln\left(1+4t^2\right)\Bigg|_1^{\pi}-\int_1^{\pi}\left(\frac{1}{2t}\right)\frac{8t}{1+4t^2}\,dt$$

$$=\frac{\ln 5}{2}-\frac{\ln\left(1+4\pi^2\right)}{2\pi}+4\int_1^{\pi}\frac{dt}{1+4t^2}=\frac{\ln 5}{2}-\frac{\ln\left(1+4\pi^2\right)}{2\pi}+2\arctan t\Bigg|_1^{\pi}$$

$$=\frac{\ln 5}{2}-\frac{\ln\left(1+4\pi^2\right)}{2\pi}-\frac{\pi}{2}$$

7. İntegralin maksimum değer alması için $4-x^2-2y^2\geq 0 \Rightarrow$ $x^2+2y^2\leq 4$ olmalıdır. Bu da bir elipsin iç bölgesidir.

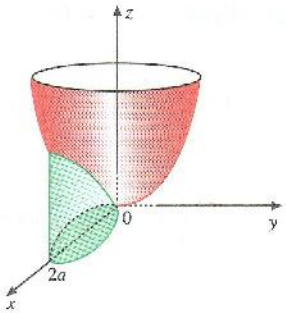


$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{2}&=r\cos\theta\\ \frac{y}{\sqrt{2}}&=r\sin\theta\end{aligned}\right\}\Rightarrow J=2\sqrt{2}\,r \text{ olur.}$$

$$\iint_{x^2+2y^2\leq 4}\left(4-x^2-2y^2\right)dy\,dx=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(4-4r^2\right)2\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta$$

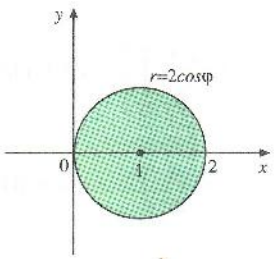
$$=8\sqrt{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1d\theta=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)2\pi=4\sqrt{2}\pi$$

8. $V = \iint_B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx\,dy$



$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= r\cos\varphi \\ \frac{y}{b} &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}$ *denirse,* $J = abr$ ve

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$ eğrisi $r = 2\cos\varphi$ çemberine dönüşeceğinden,

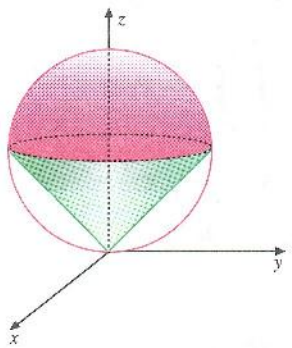


$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \int_0^{2\cos p} r^2 . abr\,dr\,d\varphi = 2\int_0^{\pi} ab\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi = 2ab\int_0^{\pi/2} \left[1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\left(1 + \cos 4\varphi\right)\right] d\varphi$$

$$= 2ab\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2ab.\frac{3}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi ab \text{ olur.}$$

9. $V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\rho=0}^{6\cos\theta} p^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$

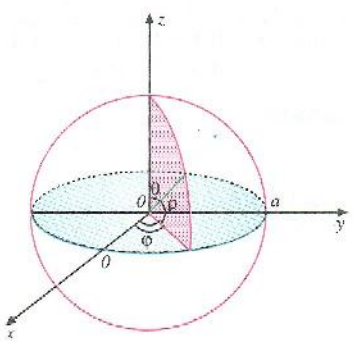


$$= 72\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \cos^3\theta \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= 72\int_0^{2\pi} -\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -18.2\pi\left(-\frac{1}{16} + 1\right)$$

$$= 18.2\pi\frac{15}{16} = \frac{135}{4}\pi$$

10. **(a)** $V = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$



(b) $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^2 |\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$

(c) $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi$

11. (a) $Alan B = 2.2 = 4$. br^2

$$A = \frac{1}{4}\iint_B \left(x^2 + y^2\right)dx dy = \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^2 \left(x^2 + y^2\right)dy\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \left(2x^2 + \frac{8}{3}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

(b) $Alan\ B = \pi.\pi = \pi^2$

$$A = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi sin(x+y)dy\,dx = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi -cos(x+y)\Big|_0^\pi dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \left[-cos(x+\pi) + cos\,x\right]dx = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (cos 2x)dx = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{2}sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi = 0.$$

(c) $Alan B = \pi r^2 = \pi.1 = \pi$ br^2

$$A = \frac{1}{\pi}\iint_B \left(x^2 + y^2\right)dy\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\, r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{\pi}.\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{\pi}.\frac{1}{4}.2\pi = \frac{1}{2}.$$

(d) $Alan B = \int_1^\infty \int_{e^{-2x}}^{e^{-x}} dy\,dx = \int_1^\infty \left(e^{-x} - e^{-2x}\right)dx = -e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_1^\infty = e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} = \frac{2e-1}{2e^2}$,

$\int_1^\infty \int_{e^{-2x}}^{e^{-x}} \frac{1}{x^3 y}dy\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^3} ln\, y\Big|_{e^{-2x}}^{e^{-x}} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^3}(-x + 2x)dx = \frac{-1}{x}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2}$ olacağından

$A = \dfrac{1}{\frac{2e-1}{2e^2}} = \frac{1}{2}.\frac{2e^2}{2e-1} = \frac{e^2}{2e-1}$ dir.

12. $I_0 = \iint_B \left(x^2 + y^2\right).\sigma\ dx\,dy = \sigma\iint_B \left(x^2 + y^2\right)dx\,dy$ integralinde

$xy = u$, $x^2 - y^2 = v$ dönüşümü yapılırsa

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2\left(x^2 + y^2\right)}$$

olacağından

$$I_0 = \sigma\int_1^3\int_1^4 \left(x^2 + y^2\right).\frac{1}{2\left(x^2 + y^2\right)}dv\,du = \frac{\sigma}{2}\int_1^3\int_1^4 dv\,du = \frac{\sigma}{2}.3.2 = 3\sigma \quad \text{olur.}$$

13. $\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \frac{y}{b} &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \frac{z}{c} &= \rho \cos\theta \end{aligned}\right\}$ bölge dönüşümü yapılırsa,

$$J = abc\ \rho^2 \,|\sin\theta|$$

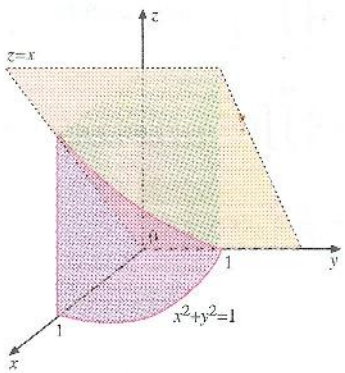
olacağından

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} \rho^2 abc\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \frac{abc}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{abc}{5}\int_0^{2\pi} -\cos\theta \Big|_0^{\pi} = d\varphi = \frac{abc}{5}.2.2\pi = \frac{4}{5}\pi abc$$

14. $J = r$ olduğundan

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{1}\int_0^{r\cos\varphi} r^2\, r\, dz\, dr\, d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{1} r^3 z \Big|_0^{r\cos\varphi} dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{1} r^4 \cos\varphi\, dr\, d\varphi = \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}.$$



15. $\frac{y}{2} \le x \le \frac{y}{2}+1 \Rightarrow 0 \le x-\frac{y}{2} \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{2x-y}{2} \le 1 \Rightarrow 0 \le u \le 1$

$0 \le y \le 4 \quad \Rightarrow 0 \le \frac{y}{2} \le 2 \quad \Rightarrow 0 \le v \le 2$

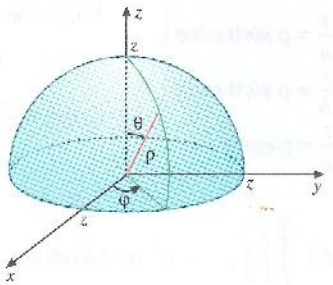
$0 \le z \le 3 \quad \Rightarrow 0 \le \frac{z}{3} \le 1 \quad \Rightarrow 0 \le w \le 1$

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{2}\right)0 + 0 = \frac{1}{6} \Rightarrow J = 6$$

$$I = \int_0^{1}\int_0^{2}\int_0^{1} (u+w)6\, du\, dv\, dw = 6\int_0^{1}\left(\frac{u^2}{2}+uw\right)\Big|_0^{1} dw = 6\int_0^{1}\left(\frac{1}{2}+w\right)dw$$

$$= 6\int_0^{1}\left(\frac{1}{2}+w\right)v\Big|_0^{2} = 12\int_0^{1}\left(\frac{1}{2}+w\right)dw = 12\left(\frac{w}{2}+\frac{w^2}{2}\right)\Big|_0^{1} = 12$$

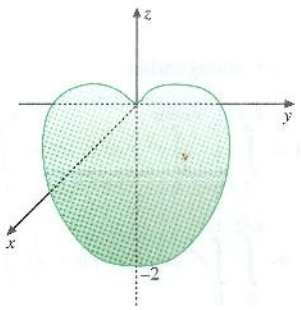
17. Dikkat edilirse, integrasyon bölgesinin üst yarı küre olduğu görülür.



a) $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{4^2-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

b) $\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{2} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$

18.



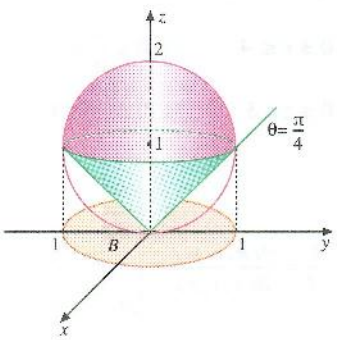
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1-\cos\theta} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^3 \Big|_0^{1-\cos\theta} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1-\cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(1-\cos\theta)^4 \Big|_0^{\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{12} 2^4 . 2\pi = \frac{8}{3}\pi$$

19. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z \Rightarrow z^2 + z^2 = 2z \Rightarrow z = 0 \vee z = 1.$

Küresel koordinatlara geçilirse

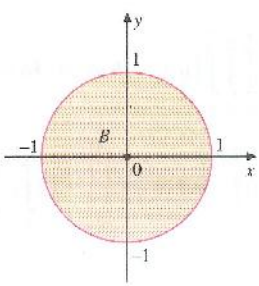


$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\theta \Rightarrow \rho = 2\cos\theta \text{ olur.}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{8}{3}\cos^3\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4}\cos^4\theta \Big|_0^{\pi/4} d\varphi = \frac{2}{3} . \left(1 - \frac{1}{4}\right) . 2\pi$$

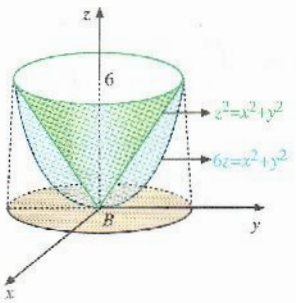
$$= \frac{2}{3} . \frac{3}{4} . 2\pi = \pi\, br^3$$

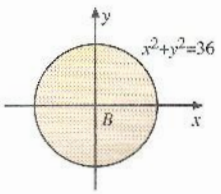


20. $V = \iiint_B \int_{\frac{x^2+y^2}{6}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dy\,dx = \iint_B \left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{6} \right) dy\,dx$

$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{6} \left(r - \frac{r^2}{6} \right) r\,dr\,d\varphi$

$= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{24} \Big|_0^6 \right) = 2\pi(72 - 54) = 36\pi$



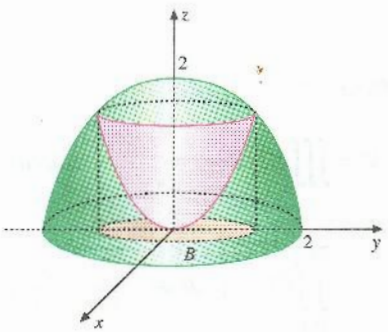


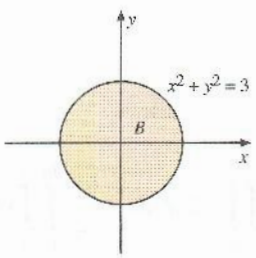
21. $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0 \Rightarrow z = 1,$

$z = -4 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$ izdüşüm bölgesi $x^2 + y^2 \le 3$ dairesidir.

$V = \iiint_B \int_{z=\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \left(4 - r^2 - \frac{r^2}{3} \right) r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(4 - r^2\right) \frac{3}{2} - \frac{r^4}{12} \Big|_0^{\sqrt{3}} \right] d\theta = 2\pi \left(-\frac{1}{3} - \frac{9}{12} + \frac{8}{3} \right) = 2\pi$





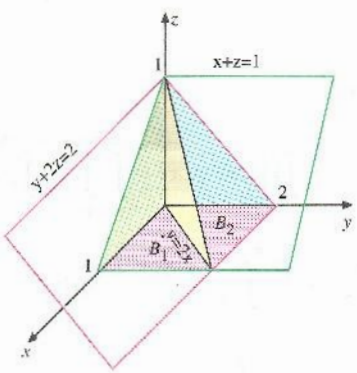
22. $x + z = 1$ ve $y + 2z = 2$ düzlemleri

$y + 2(1 - x) = 2 \Rightarrow y = 2x$ düzlemi üzerinde kesişirler (Sarı düzlem).

Arakesit doğrusunun xOy düzlemindeki dik izdüşümü $y = 2x$ doğrusudur.

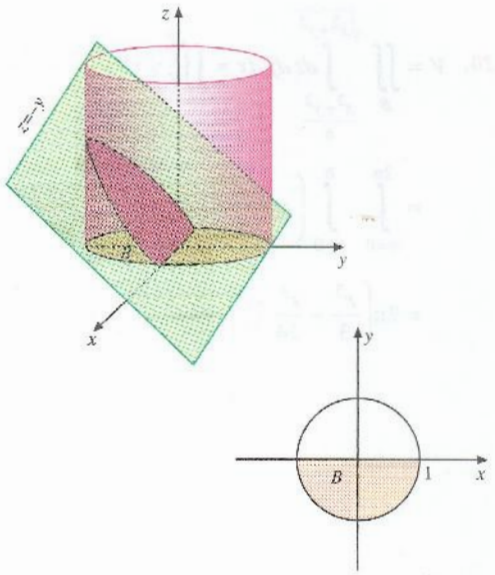
$V = \iiint_{B_1} \int_0^{1-x} dz\,dy\,dx + \iiint_{B_2} \int_0^{1-\frac{y}{2}} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{1-x} dz\,dy\,dx + \int_0^1 \int_{2x}^2 \int_0^{1-\frac{y}{2}} dz\,dy\,dx$

$= \int_0^1 \int_0^{2x} (1 - x)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_{2x}^2 \left(1 - \frac{y}{2} \right) dy\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ br^2 olur.



23. $V = \iiint_B \int_0^{-y} dz\,dy\,dx = \iint_B -y\,dy\,dx = \int_\pi^{2\pi}\int_0^1 -r\sin\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi$

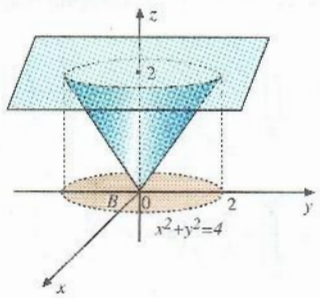
$= -\frac{1}{3}\int_\pi^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\cos\varphi\,\Big|_\pi^{2\pi} = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}.$



24. $\sigma(x,y,z) = z$

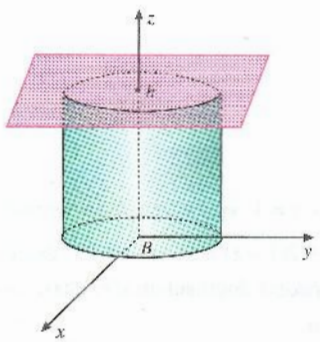
$M = \iiint z\,dz\,dy\,dx = \iint_B \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dz\,dy\,dx = \iint_B \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dy\,dx$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2-r)\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} r^2 - \frac{r^3}{3}\,\Big|_0^2\,d\varphi = \left(4 - \frac{8}{3}\right).2\pi = \frac{8}{3}\pi.$



25. $\sigma(x,y,z) = z$

$M = \iiint_B \int_0^h z\,dz\,dy\,dx = \frac{h^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\varphi = \frac{h^2}{2}\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}a^2h^2$

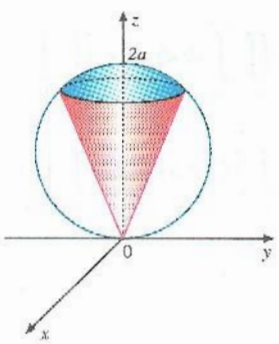


26. $\sigma(x,y,z) = z$

$M = \iiint_B z\,dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{2a\cos\theta} \rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \frac{1}{4}\rho^4\,\Big|_0^{2a\cos\theta} \cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 4a^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \cos^5\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

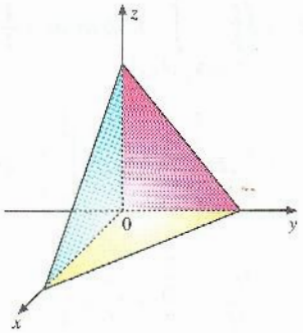
$= 4a^4\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{6}\cos^6\theta\right)\Big|_0^{\pi/6} d\varphi = \frac{2}{3}a^4\left(1 - \frac{1}{8}\right).2\pi = \frac{7}{6}\pi a^4$



27. $M = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} 2x\,dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{2-x} 2x(2-x-y)\,dy\,dx$

$= \int_0^2 \left[\left(4x - 2x^2\right)y - xy^2 \right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 \left[\left(4x - 2x^2\right)(2-x) - x(2-x)^2 \right] dx$

$= \int_0^2 \left(x^3 - 4x^2 + 4x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$

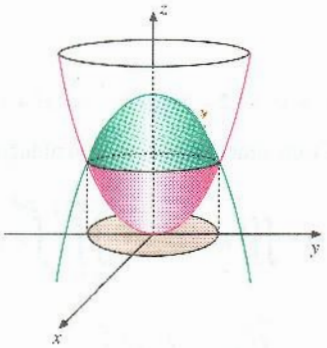


28. $16 - x^2 - 2y^2 = 2x^2 + 2y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

$M = \iint_B \int_{2x^2+2y^2}^{16-2x^2-2y^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

$= \iint_B \left[16 - 2\left(x^2+y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right) \right] \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

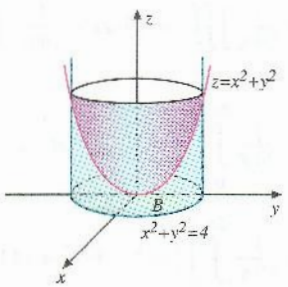
$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(16 - 4r^2\right) r.r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{3}r^3 - \frac{4}{5}r^5 \right)\Big|_0^2 d\varphi = \frac{256}{15}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{512}{15}\pi$



29. $\sigma(x,y,z) = 1$ olalım.

$M = \iint_B \int_0^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx = \iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r.r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8}{3}.2\pi = \frac{16}{3}\pi$

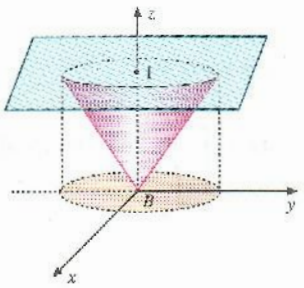


30. Cisim homogen ve Ox ve Oy düzlemlerine göre simetrik olduğundan

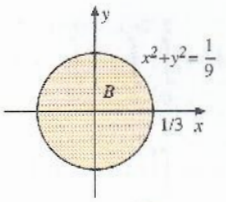
$\bar{x} = 0, \quad y = \bar{0}$ dır.

$M = \iint_B \int_{z=3\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \iint_B k\left(1 - 3\sqrt{x^2+y^2}\right) dy\,dx$

$= k\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1/3} (1-3r)\,r\,dr\,d\theta = 2k\pi\left(\frac{r^2}{2} - r^3 \Big|_0^{\frac{1}{3}} \right) = 2k\pi\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{27}\right) = 2k\pi\frac{9}{18.27} = \frac{\pi}{27}k$



$$M_z = \iiint_B \int_{z=3\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z.k.dz\,dy\,dx = \frac{k}{2}\iint_B \left(1-9\left(x^2+y^2\right)dy\,dx\right) = \frac{k}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1/3}\left(1-9r^2\right)r.\,dr\,d\theta$$



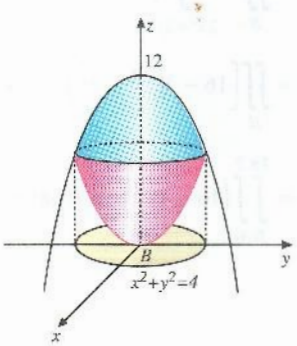
$$= \frac{k}{2}.2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{9}{4}r^3\Big|_0^{\frac{1}{3}}\right) = k\pi\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{12}\right) = k6\pi\frac{1}{18.12} = \frac{k\pi}{36} \quad olacağından$$

$$\bar{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{\frac{c\pi}{36}}{\frac{c\pi}{27}} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

bulunur. O halde cismin ağırlık merkezi $G\left(0,\,0,\,\frac{3}{4}\right)$ noktasıdır.

31. $x^2+y^2 = 12-2x^2-2y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$

Cisim simetrik ve homogen olduğundan $\bar{x} = \bar{y} = 0$ dır.



$$M = \iiint k\,dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{12-2r^2} r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(12-3r^2\right)r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(6r^2-\frac{3}{4}r^4\right)\Big|_0^2 d\varphi = 12.\int_0^{2\pi} d\varphi = 12.2\pi = 24\pi$$

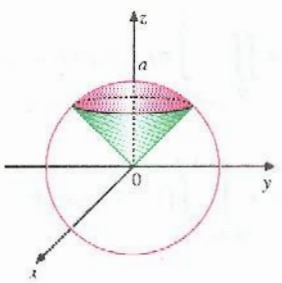
$$\bar{z} = \frac{1}{24\pi}\iiint z\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{24\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{12-2r^2} z\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{24\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\frac{1}{2}z^2\Big|_{r^2}^{12-2r^2} dr\,d\varphi = \frac{1}{48\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[\left(12-2r^2\right)^2-r^4\right]dr\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{48\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(3r^4-48r^2+144\right)dr\,d\varphi = \frac{1}{48\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{5}r^5-16r^3+144r\right)\Big|_0^2 d\varphi = \frac{1}{48\pi}.\frac{896}{5}.2\pi = \frac{112}{15}$$

olacağından, ağırlık merkezi $\left(0,0,\frac{112}{15}\right)$ dir.

32. $\bar{x} = \bar{y} = 0$ dır.



$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{a}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/3} d\varphi = \frac{a^3}{6}.2\pi = \frac{1}{3}\pi a^3$$

$$M_z = \iiint_B z\,dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{a} 3\cos\theta.\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi/3}d\varphi = \frac{1}{4}a^4.\frac{3}{8}.2\pi = \frac{3}{16}\pi a^4$$

$$\bar{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{\frac{3}{16}\pi a^4}{\frac{1}{3}\pi a^3} = \frac{9}{16}a$$

33. $I_z = \iiint_B \left(x^2+y^2\right)\sigma(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{a}\left(\rho^2\sin^2\theta\cos^2+\rho^2\theta\sin^2\varphi\right)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{a}\rho^4\sin^3\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \frac{a^5}{5} = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+1-\frac{1}{3}\right)d\varphi = \frac{5}{24}.2\pi = \frac{5\pi}{12}$$

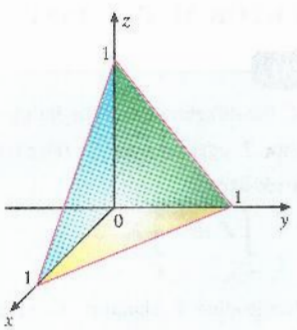
34. $I_0 = \iiint\left(x^2+y^2+z^2\right)dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}\left(x^2+y^2+z^2\right)dz\,dy\,dx$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}\left(x^2z+y^2z+\frac{1}{3}\right)\Big|_0^{1-x-y}dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1\left[x^2(1-x-y)+y^2(1-x-y)+\frac{1}{3}(1-x-y)^3\right]dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left[\left(x^2-x^3\right)y-\frac{1}{2}.x^2y^2+(1-x)\frac{y^3}{3}-\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{12}(1-x-y)^4\right]\Big|_0^{1-x}dx$$

$$= \int_0^1\left[\frac{3}{4}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}(1-x)^4\right]dx = \frac{3}{20}x-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{30}(1-x)^5\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$



byns

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

15 EĞRİSEL İNTEGRALLER

REEL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN EĞRİSEL İNTEGRALİ

TANIM

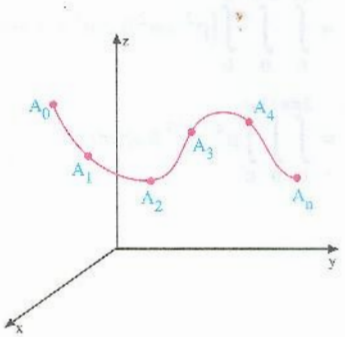
$M_k(x_k, y_k, z_k)$, $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ eğri parçasının herhangi bir noktası olmak üzere

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k$$

limiti varsa bu limite f fonksiyonunun C üzerindeki eğrisel integrali denir.

$$\int_C f(x, y, z)dl$$

ile gösterilir. Bu integrale birinci çeşit eğrisel integral denir.



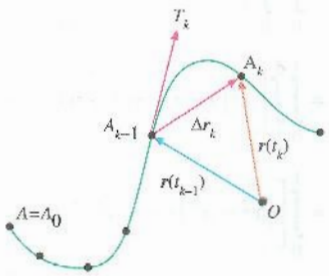
VEKTÖR ALANLARININ EĞRİSEL İNTEGRALİ

TANIM

C bir düzgün eğri, F de bu eğri üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. T, eğrinin $(x(t), y(t), z(t))$ noktasındaki birim teğet vektörü olmak üzere

$$\int_C F.dr = \int_C F.Tdl$$

integraline F alanının C üzerindeki integrali denir. Bu integrale ikinci çeşit eğrisel integral de denir.



EĞRİSEL İNTEGRALLERİN TEMEL TEOREMLERİ

TEOREM

C eğrisinin başlangıç noktası (x_1, y_1, z_1), bitim noktası (x_2, y_2, z_2) olsun. f, bu C eğrisini içine alan bölge üzerinde türevlenebilen üç değişkenli bir fonksiyon ve gradf, C eğrisi üzerindeki sürekli işe

$$\int_C \nabla f.dr = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

dir.

SONUÇ

F, türevlenebilen bir fonksiyonun gradiyenti ise $\int_C F.dr$ integrali yoldan bağımsızdır.

TEOREM

P, Q, R fonksiyonları bir D bölgesinde sürekli olsunlar.

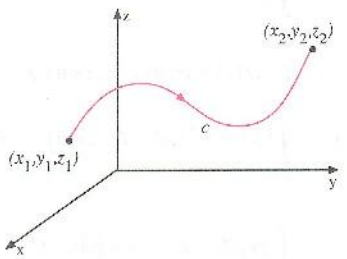
Eğer D bölgesinde tanımlı ve

$$df = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa, yani $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ifadesi f fonksiyonunun tam diferensiyeli ise D bölgesinde (x_1, y_1, z_1) ile (x_2, y_2, z_2) noktalarını birleştiren her bir C eğrisi için

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = f(x_2,y_2,z_2) - f(x_1,y_1,z_1)$$

olur.



TEOREM

C, D bölgesinde bulunan yönlendirilmiş bir kapalı eğri ve F de D bölgesinde bir vektör alanı olsun. Eğer $\int_C F.dr$ yola bağlı değilse

$$\int_C F.dr = 0$$

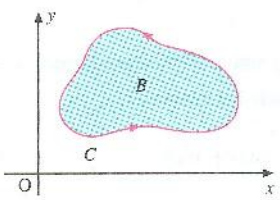
olur.

TEOREM (Green Teoremi)

B, xOy düzleminde bir basit bölge, C de bu bölgeyi çevreleyen ve saat yönünün ters yönünde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları B üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

dir. Bu eşitliğe Green formülü adı verilir.



byns

PROBLEMLER

- Reel Değerli Fonksiyonların Eğrisel integralleri
- Vektör Alanlarının Eğrisel integrali
- Eğrisel integrallerin Temel Teoremleri

1. Aşağıdaki integralleri, verilen eğri parçaları üzerinde hesaplayacağız.

(a) $\int_C (x^2 - y^2)\,dl$,

$C \ldots r(t) = a\cos t\,i + a\sin t\,j, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

(b) $\int_C (x^2 - y^2)\,dl, \quad C \ldots r(t) = t\,i + (1-t)\,j, \quad 0 \le t \le 1$

(c) $\int_C xy\,dl, \quad C \ldots |x| + |y| = 2$

(d) $\int_C (xy + y + z)\,dl, \quad C \ldots r(t) = 2t\,i + t\,j + k, \quad 0 \le t \le 1$

(e) $\int_C 3x\sqrt{x^2 + y^2 + 3z}\,dl$,

$C \ldots r(t) = 2t\,i + j + k, \quad -1 \le t \le 1$

(f) $\int_C (2x + 9xy)\,dl$,

$C \ldots r(t) = t\,i + t^2 j + t^3 k, \quad 0 \le t \le 1$

(g) $\int_C \sqrt{3}\,\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1} dl$,

$C \ldots r(t) = t\,i + t\,j + t\,k, \quad 1 \le t \le \infty$

2. Aşağıdaki integralleri, karşılarında yazılı olan eğri parçaları üzerinde hesaplayınız.

(a) $\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy, \quad C \ldots y = x^2, \quad 0 \le x \le 1$

(b) $\int_C ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy, \quad C \ldots y = x, \quad 0 \le x \le 1$

(c) $\oint_C y^3\,dx - x^3\,dy, \quad C \ldots |x| + |y| = 1$

(d) $\oint_C xy^6\,dx + \left(3x^2y^5 + 6x\right)dy, \quad C \ldots x^2 + 4y^2 = 1$

(e) $\int_C xy\,dx + y\,dy - yz\,dz, \quad C \ldots r(t) = t\,i + t^2 j + t\,k, \quad 0 \le t \le 1$

(f) $\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz, \quad C \ldots r(t) = \sin t\,i + \cos t\,j + t\,k, \quad 0 \le t \le 2\pi$

3. Aşağıda verilen F alanı ve r eğrisi için $\int_C F.dr$ integralini hesaplayınız.

(a) $F = z\,i + x\,j - y\,k$,

$r(t) = t\,i + t^2 j + t^3 k, \quad 0 \le t \le 1$

(b) $F = y\,i - x\,j + z\,k$,

$r(t) = \sin t\,i + \cos t\,j + 2t\,k \quad 0 \le t \le \pi$

(c) $F = x^2 i + yz\,j + y^2 k$,

$r(t) = 3t\,j + 4t\,k, \quad 0 \le t \le 1$

(d) $F = 2y\,i + 3x\,j + (x + y)\,k$,

$r(t) = (\cos t)\,i + (\sin t)\,j + \frac{t}{6}k, \quad 0 \le t \le 2\pi$

(e) $F = xy\,i + y\,j - yz\,k$,

$r(t) = t\,i + t^2\,j + t\,k, \quad 0 \le t \le 1$

4. Aşağıdaki integrallerin yoldan bağımsız olduklarını gösterip değerlerini hesaplayınız.

(a) $\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(y^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy$

(b) $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (2x + 3y)dx + (2y + 3x)$

(c) $\int_{(1,-2)}^{(3,4)} \frac{y}{x^2}\,dx - \frac{1}{x}\,dy$

(d) $\int_{(1,0,1)}^{(2,1,2)} y^2 z^3\,dx + 2xyz^3\,dy + 3xy^2 z^2\,dz$

(e) $\int_{(0,0,0)}^{\left(\pi,\pi,\frac{1}{\pi}\right)} (\cos x 2yz)dx + (\sin y + 2xz)dy + (z + 2xy)dz$

5. $\int_{(1,1)}^{(e,1)} \left(2x\ln\frac{x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{x}\right)dx + \left(2y\ln\frac{x}{y} + a\frac{x^2 + y^2}{y}\right)dy$

integralinin yoldan bağımsız olması için a ne olmalıdır? a nın bu değeri için integrali hesaplayınız.

6. $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} \left(2xyz^3+3\right)dx+\left(mx^2z^3-2\right)dy+\left(3x^2yz^2+4z\right)dz$

integralinin yoldan bağımsız olması için m ne olmalıdır. m nin bu değeri için integrali hesaplayınız.

7. C eğrisi, köşeleri (0,0), (1,0), (1,1,) ve (0,1) olan kare olup saat yönünün ters yönünde yönlendirilmiştir.

$$I=\oint_C xydx+\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)dy$$

integralini hesaplayınız.

8. C eğrisi $x^2+y^2=1$ birim çemberi olup yönü saat yönünün tersidir.

$$I=\oint_C \left(x^2+y^2\right)^{3/2}dx+\left(x^2+y^2\right)^{3/2}dy$$

integralini hesaplayınız.

9. Green Teoreminden yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız. Burada C eğrisinin yönü, saatin yönünün tersidir.

(a) $\oint_C \left(2y+\sqrt{9+x^3}\right)dx+\left(5x+e^{\arctan y}\right)dy$

C eğrisi $x^2+y^2=4$ çemberi

(b) $\oint_C ydx-xdy$, C eğrisi $r=1-\cos\varphi$ kardiyoidi.

(c) $\oint_C 4xy^3dx+6x^2y^2dy$,

C eğrisi $r=1-\cos\varphi$ kardiyoidi

(d) $\oint_C 3xydx+2x^2dy$,

C eğrisi $y=x$ doğrusuyla $y=x^2-2x$ parabolünün sınırladığı bölgenin çevre eğrisidir.

(e) $\oint_C \left(x+y^2\right)dx+\left(y+x^2\right)dy$,

C eğrisi, köşeleri (1,1,), (−1,1), (−1, −1), (1, −1) olan karedir.

(f) $\oint_C \left(x^2+y^2\right)dx-2xy\,dy$,

C eğrisi, $x=0$, $y=0$ ve $x+y=1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin çevre eğrisidir.

(g) $\oint_C e^x\sin y\,dx+e^y\cos y\,dy$;

C eğrisi, $x=0$, $y=0$ ve $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ tarafından sınırlanan bölgenin çevre eğrisidir.

(h) $\oint_C (x+6y)dx+(2x+y)dy$;

C eğrisi $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ çemberi

(i) $\oint_C \frac{y}{1+x^2}dx+\arctan x\,dy$, C eğrisi $x^2+y^4=1$ ovali

(i) $\oint_C x^2dx-y^2dy$, C eğrisi $r=1+\cos\varphi$ kardiyoidi.

10. Herhangi bir kapalı C eğrisi için

$$\oint_C 4x^3ydx+x^4dy=0$$

olacağını gösteriniz.

11. Aşağıda verilen vektör alanlarının bazı vektörlerini çiziniz.

(a) $F(x,y)=3\,i+4\,i$

(b) $F(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,(x\,i+y\,j)$

(c) $F(x,y)=-x\,i-y\,j$

12. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $div\,(curl\,F)=0$

(b) $curl\,(grad\,f)=\mathbf{0}$

(c) $div\,(fF)=f\,div\,F+(grad\,f)\,F$

(ç) $curl\,(F+G)=curl\,F+curl\,G$

(d) $div\,(F\times G)=(curl\,F)\,.\,G-F\,.\,(curl\,G)$

(e) $curl\,(fF)=f\,(curl\,F)+(grad\,f)\times F$

13. Eğer $F=$ **curl** G ise G ve F nin bir vektör potansiyelidir denir. Bir telden geçen akımın meydana getirdiği magnetik indüksiyon alanı, I bir sabit olmak üzere,

$$B(x,y,z)=I\left(-\frac{y}{x^2+y^2}i+\frac{x}{x^2+y^2}j\right)$$

biçiminde verilir.

$$G(x,y,z)=-\frac{1}{2}ln\left(x^2+y^2\right)k$$

biçiminde tanımlanan G fonksiyonunun B için bir vektör potansiyeli olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $\int_C (x^2 - y^2)\,dl, \quad C \ldots r(t) = a\cos t\,i + a\sin t\,j, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$r'(t) = -a\sin t\,i + a\cos t\,j \Rightarrow \|r'(t)\| = \left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t\right)^{1/2} = a$

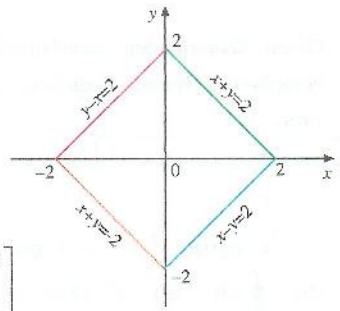
$$\int_C (x^2 - y^2)\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t\right) a\,dt = a^3 \int_0^{\pi/4} \cos 2t\,dt = a^3 \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^3}{2}$$

(b) $\int_C (x + y)\,dl, \quad C \ldots r(t) = ti + (1-t)j, \quad 0 \le t \le 1$

$r'(t) = i - j \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{2}$

$$\int_C (x+y)\,dl = \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 dt = \sqrt{2}.1 = \sqrt{2}$$

(c) $\int_C xy\,dl, \quad C \ldots |x| + |y| = 2$



$$\int_C xy\,dl = \int_2^0 x(2 - x)\sqrt{2}\;dx + \int_0^{-2} x(x+2)\sqrt{2}\,dx$$

$$+ \int_{-2}^0 x(-x-2)\sqrt{2}\,dx + \int_0^2 x(x-2)\sqrt{2}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\left[\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_2^0 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_0^{-2} + \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-2}^0 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^2\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\left(-4 + \frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{8}{3} + 4\right) + \left(-\frac{8}{3} + 4\right) + \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right] = 0$$

(d) $\int_C (xy + y + z)\,dl, \quad C \ldots r(t) = 2t\,i + t\,j + k, \quad 0 \le t \le 1.$

$r'(t) = 2i + j \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{5}$

$$\int_C (xy + y + z)\,dl = \int_0^1 (2t.t + t + 1)\sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t\right)\Big|_0^1 = \frac{13\sqrt{5}}{6}$$

(e) $\int_C 3x\sqrt{x^3 + y^2 + 3z}\;\;dl, \quad C \ldots r(t) = t\,i + j + k, \quad -1 \le t \le 1 \quad r'(t) = i \Rightarrow \|r'\| = 1$

$$\int_C 3x\sqrt{x^2 + y^2 + 3z}\;\;dl = \int_{-1}^1 3t\sqrt{t^2 + 1 + 3}\;\;dt = \frac{3}{2}\int_{-1}^1 2t\sqrt{t^2 + 4}\;\;dt = \left(t^2 + 4\right)^{3/2}\Big|_{-1}^1 = 0$$

(e) $\int_C (2x + 9xy)\,dl \quad C \ldots r(t) = ti + t^2 j + t^3 k, \quad 0 \le t \le 1$

$r'(t) = i + 2t\,j + 3t^2 k \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$

$$\int_C (2x+9xy)dl = \int_0^1 \left(2t+9t^3\right)\sqrt{1+4t^2+9t^4}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{1+4t^2+9t^4}\left(8t+36t^3\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+4t^2+9t^4\right)^{3/2}.\frac{2}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}(1+4+9) = \frac{7}{3}$$

(g) $\int_C \sqrt{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} dl,\ C\ldots r(t) = ti+tj+tk,\ 1 \le t \le \infty$

$r'(t) = i+j+k \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{3}$ olduğundan

$$\int_C \sqrt{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} dl = \int_1^\infty \frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{3t^2}\,dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_1^\infty = 1$$

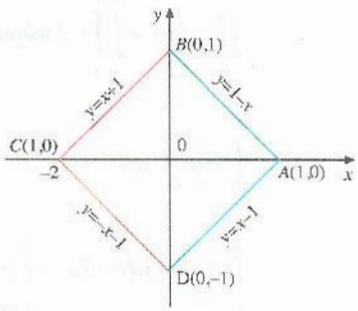
2. (a) $\int_C 2xydx + x^2dy,\ C\ldots y = x^2,\ \ 0 \le x \le 1.$

$$\int_C 2xydx + x^2dy = \int_1^1 \left(2x.x^2 + x^2.2x\right)dx = \int_0^1 4x^3dx = x^4\Big|_0^1 = 1$$

(b) $\int_C ye^{xy}dx + xe^{xy}dy,\ C\ldots y = x,\ 0 \le x \le 1.$

$$\int_C ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = \int_0^1 \left(xe^{x^2} + xe^{x^2}\right)dx = \int_0^1 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}\Big|_0^1 = e-1.$$

(c) $\int_C y^3dx - x^3dy,\ C\ldots |x|+|y| = 1$



1. yol:

$$\int_C y^3dx - x^3dy = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

$$= \int_1^0 \left[(1-x)^3 + x^3\right]dx + \int_0^{-1} \left[(x+1) - x^3\right]dx + \int_{-1}^0 \left[(-x-1)^3dx + x^3\right]dx + \int_0^1 \left[(x-1)^3 - x^3\right]dx$$

$$= \int_1^0 \left(1-3x+3x^2\right)dx + \int_0^{-1} \left(1+3x+3x^2\right)dx + \int_{-1}^0 \left(-1-3x-3x^2\right)dx + \int_0^1 \left(-3x^2+3x-1\right)dx$$

$$= \left(x-\frac{3}{2}x^2+x^3\right)\Big|_1^0 + \left(x+\frac{3}{2}x^2+x^3\right)\Big|_{-1}^0 + \left(-x-\frac{3}{2}x^2-x^3\right)\Big|_{-1}^0 + \left(-x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

II. yol: Green Teoreminden yararlanalım.

$P = y^3$, $Q = -x^3$ alınırsa $Q_x - P_y = -3(x^2 + y^2)$ olur.

$$\int_C y^3\,dx - x^3\,dy = \iint_B \left(Q_x - P_y\right)dx\,dy = -3\iint_B \left(x^2 + y^2\right)dx\,dy$$

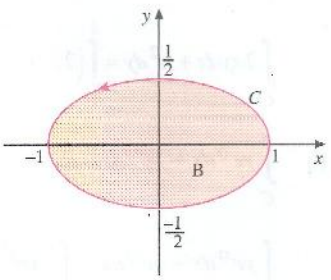
$$= -3\int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1}\left(x^2 + y^2\right)dy\,dx - 3\int_{0}^{1}\int_{x-1}^{-x+1}\left(x^2 + y^2\right)dy\,dx$$

$$= -6\int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1}\left(x^2 + y^2\right)dy\,dx - 6\int_{0}^{1}\int_{0}^{-x+1}\left(x^2 + y^2\right)dy\,dx$$

$$= -6\int_{-1}^{0}\left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{0}^{x+1} - 6\int_{0}^{1}\left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{x}^{x+1}$$

$$= -6\int_{-1}^{0}\left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{3}\right)dx - 6\int_{0}^{1}\left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3}\right)dx = -1 - 1 = -2.$$

(d) Green teoreminden yararlanalım.



$P(x,y) = xy^6$, $Q(x,y) = 3x^2y^5 + 6x$, $Q_x - Py = 6xy^5 + 6 - 6xy^5 = 6$

$$\int_C xy^6\,dx + \left(3x^2y^5 + 6x\right)dy = \iint_B 6\,dx\,dy$$

olur. $x = 2r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dönüşümü yapılırsa, B bölgesi $r = 1$ dairesine dönüşür.

$$\iint_B 6\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 6.2r\,dr\,d\varphi = 12\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^1 d\varphi = 6.2\pi = 12\pi$$

(e) $\displaystyle\int_C xy\,dx + y\,dy - yz\,dz,\quad C\ldots r(t) = ti + t^2j + tk,\quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C xy\,dx + y\,dy - 2z\,dz = \int_0^1 \left(t.t^2 + t^2.2t - t^2.t\right)dt = \int_0^1 2t^3\,dt = \frac{1}{2}t^4 = \frac{1}{2}.$$

(f) $\displaystyle\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz,\quad C\ldots r(t) = \sin t\,i + \cos t\,j + tk,\quad 0 \le t \le 2\pi.$

$$\int_0^{2\pi}\left(t\cos t + \sin t(-\sin t) + \cos t\right)dt = \int_0^{2\pi} t\cos t\,dt - \int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi}\cos t\,dt$$

$$= t\sin t + \cos t\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \sin t\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 0 - \frac{\pi}{4} + 0 = -\frac{\pi}{4}$$

3. (a) $F = z\,i + x\,j - y\,k,\ r(t) = t\,i + t^2\,j + t^3\,k,\ 0 \le t \le 1.$

$$\int_C F.dr = \int_0^1 \left(t^3, t, -t^2\right).\left(1, 2t, 3t^2\right)dt = \int_0^1 \left(t^3 + 2t^2 - 3t^4\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{5}t^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{19}{60}$$

(b) $F(t) = y\,i - x\,j + z\,k,\ r(t) = \sin t\,i + \cos t\,j + 2t\,k,\ 0 \le t \le \pi$

$$\int_C F.dr = \int_0^\pi (\cos t\,i - \sin t\,j + 2t\,k).(\cos t\,i - \sin t\,j + 2\,k)dt$$

$$= \int_0^\pi \left(\cos^2 t + \sin^2 t + 4t\right)dt = \int_0^\pi (1 + 4t)dt = t + 2t^2 \Big|_0^\pi = \pi + 2\pi^2$$

(c) $F = x^2\,i + yz\,j + y^2\,k,\ r(t) = 3t\,j + 4t\,k,\ 0 \le t \le 1$

$$\int_C F.dr = \int_0^1 \left(12t^2\,j + 9t^2\,k\right).(3\,j + 4\,k)dt = \int_0^1 \left(36t^2 + 36t^2\right)dt = 72.\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 24.$$

(d) $F = 2y\,i + 3x\,j + (x + y)\,k,\ r(t) = \cos t\,i + \sin t\,j + \frac{t}{6}k,\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_C F.dr = \int_0^{2\pi} \left[2\sin t\,i + 3\cos t\,j + (\cos t + \sin t)\,k\right].\left(-\sin t\,i + \cos t\,j + \frac{1}{6}\,k\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-2\sin^2 t + 3\cos^2 t + \frac{1}{6}(\cos t + \sin t)\right]dt = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1 - \cos 2t}{2} + 3.\frac{1 + \cos 2t}{2} + \frac{1}{6}(\cos t + \sin t)\right]dt$$

$$= \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{6}\sin t - \frac{1}{6}\cos t\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{1}{6}$$

(e) $F = xy\,i + y\,j - yz\,k,\ r(t) = t\,i + t^2\,j + t\,k,\qquad 0 \le t \le 1$

$$\int_C F.dr = \int_0^1 \left(t^3\,i + t^2\,j - t^2\,k\right).(i + 2t\,j + k)dt = \int_0^1 \left(t^3 + 2t^3 - t^2\right)dt = t^4 - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. (a) $P = y^2 + 2xy,\quad Q = x^2 + 2xy,\quad P_y = 2y + 2x,\quad Q_x = 2x + 2y \ \Rightarrow\ P_y = Q_x$

$$f(x,y) = \int P(x,y)dx = \int \left(y^2 + 2xy\right)dx = xy^2 + x^2y + \varphi(y)$$

$$Q = f_y(x,y) \Rightarrow x^2 + 2xy = 2xy + x^2 + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C\ (sabit)$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(y^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy = f(1,2) - f(0,0) = 4 + 2 - 0 = 6.$$

(b) $P(x,y)=2x+3y,\ Q(x,y)=2y+3x,\ P_y=Q_x=3 \Rightarrow$ integral yoldan bağımsız.

$f(x,y)=\int(2x+3y)dx=x^2+3xy+\varphi(y)$

$f_y(x,y)=Q(x,y)\Rightarrow 3x+\varphi'(y)=2y+3x\Rightarrow\varphi'(y)=2y\Rightarrow\varphi(y)=y^2 \Rightarrow f(x,y)=x^2+3xy+y^2$

dir. Buna göre

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(2x+3y)dx+(2y+3x)=f(1,1)-f(0,0)=5-0=5$$

olur.

(c) $P=\frac{y}{x^2},\ Q=-\frac{1}{x}\Rightarrow P_y=Q_x=-\frac{1}{x^2}$ İntegral yoldan bağımsız.

$f(x,y)=\int\frac{y}{x^2}dx=-\frac{y}{x}+\varphi(y)$ olur. $f_y=Q\Rightarrow-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=-\frac{1}{x}\Rightarrow\varphi(y)=c\ (sabit)$

$$\int_{(1,-2)}^{(3,4)}\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy=f(3,4)-f(1,-2)=-\frac{4}{3}+\frac{2}{1}=\frac{2}{3}.$$

(d) $P=y^2z^3,\quad Q=2xyz^3,\quad R=3x^2z^2 \Rightarrow P_y=Q_x=2yz^3,\quad P_z=R_x=3y^2z^2,\quad Q_z=R_y=6xz^2$

olduğundan integral yoldan bağımsızdır.

$f(x,y,z)=\int y^2z^3dx=xy^2z^3+\varphi(y,z)$

$f_y=Q\Rightarrow 2xyz^3+\varphi'(y,z)=2xyz^3=\varphi'(y,z)=0 \Rightarrow \varphi(y,z)=\psi(z)$

$f_z=R\Rightarrow 3x^2z^2+\psi'(z)=3xy^2z^2 \Rightarrow \psi'(z)=0 \Rightarrow \psi(z)$ sabittir.

$$\int_{(1,0,1)}^{(2,1,2)}y^2z^3dx+2xyz^3dy+3xy^2z^2dz=f(2,1,2)-f(1,0,1)=2.1.8-1.0.1=16.$$

(e) $P=\cos x+2yz,\quad Q=\sin y+2xz,\quad R=z+2xy \Rightarrow P_y=Q_x=2z,\ P_z=R_x=2y,\quad Q_z=R_y=2x.$

İntegral yoldan bağımsızdır.

$f(x,y,z)=\int(\cos x+2yz)dx=\sin x+2xyz+\varphi(y,z)$

$f_y=Q\Rightarrow 2xz+\varphi_y(y,z)=\sin y+2xz\Rightarrow\varphi_y(y,z)=\sin y\Rightarrow\varphi(y)=-\cos y+\psi(z) \Rightarrow$

$f(x,y,z)=\sin x-\cos y+2xyz+\psi(z)$ olur. $f_z=R$ olacağından

$2xy+\psi'(z)=z+2xy\Rightarrow\psi'(z)=z\Rightarrow\psi(z)=\frac{1}{2}z^2$ dir. Bu durumda $f(x,y,z)=\sin x-\cos y+2xyz+\frac{1}{2}z^2$

olur. Buna göre

$$\int_C(\cos x+2yz)dx+(\sin y+2xz)+(z+2xy)dz=f\left(\pi,\pi,\frac{1}{\pi}\right)-f(0,0,0)=1+2\pi+\frac{1}{2\pi^2}+1=2+2\pi+\frac{1}{2\pi^2}$$

bulunur.

5. (a)

$$P = 2x\ln\frac{x}{y} + \frac{x^2+y^2}{x}, \qquad Q = 2y\ln\frac{x}{y} + a\frac{x^2+y^2}{y}$$

$$P_y = 2x.\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{x}{y}} + \frac{2y}{x} = -\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}, \qquad Q_x = 2y.\frac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} = a.\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x} + a.\frac{2x}{y}$$

$P_y = Q_x \Rightarrow -\frac{2x}{y} + \frac{2y}{y} = \frac{2y}{x} + a.\frac{2x}{y} \Rightarrow a = -1$ olmalıdır.

İntegral yoldan bağımsız olduğundan, integrali $(1,1)$, $(1,e)$ noktalarını birleştiren $x=1$ doğrusu boyunca hesaplayalım. İntegralde $x=1$ yazılırsa $dx = 0$ olur.

$$\int_{(1,1)}^{(1,e)}\left[2x\ln\frac{x}{y} + \frac{x^2+y^2}{x}\right]dx + \left[2y\ln\frac{x}{y} - \frac{x^2+y^2}{y}\right]dy = \int_1^e\left(2y\ln\frac{1}{y} - \frac{1+y^2}{y}\right)dy$$

$$= \int_1^e\left(-2y\ln y - \frac{1}{y} - y\right)dy = -y^2\ln y + \frac{1}{2}y^2 - \ln y - \frac{1}{2}y^2 = -\left(y^2+1\right)\ln y\Big|_1^e = -\left(e^2+1\right)$$

6.

$$\left.\begin{aligned} P(x,y,z) &= 2xyz^3 + 3 \\ Q(x,y,z) &= mx^2z^3 - 2 \\ R(x,y,z) &= 3x^2yz^2 + 4z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} P_y = Q_x &= 2xz^3 = 2mxz^3 \Rightarrow m = 1 \text{ olmalı} \\ P_z = R_x &= 6xyz^2 \\ Q_z = R_y &= 3x^2z^2 \end{aligned}$$

$$f(x,y,z) = \int\left(2xyz^3 + 3\right)dx + u(y,z) = x^2yz^3 + 3x + u(y,z)$$

$$f_y = Q \quad\Rightarrow\quad x^2z^3 + u_y(y,z) = x^2z^3 - 2 \Rightarrow u_y(y,z) = -2 \Rightarrow u(y,z) = -2y + h(z)$$

$$f_z = R \quad\Rightarrow\quad 3x^2yz^2 + h'(z) = 3x^2yz^2 + 4z \Rightarrow h'(z) = 4z \Rightarrow h(z) = 2z^2$$

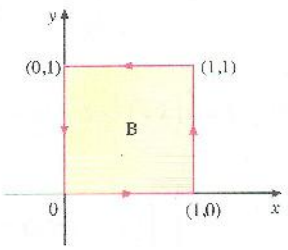
$f(x,y,z) = x^2yz^3 + 3x - 2y + 2z^2$ olağından $I = f(1,2,3) - f(0,0,0) = 71$ bulunur.

7. $P(x,y) = xy, \quad Q(x,y) = x^{3/2} + y^{3/2}$

$$\oint_C xy\,dx + \left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)dy = \iint_B \left(Q_x - P_y\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^{1/2} - x\right)dy\,dx$$

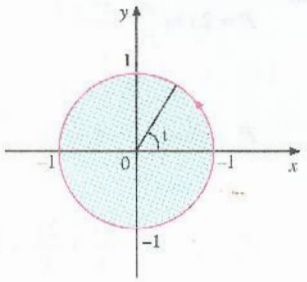
$$= \int_0^1\left(\frac{3}{2}x^{1/2} - x\right)dx = \left(x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



8. $I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (Q_x - P_y)\,dy\,dx = \iint \left(\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2}\,2x - \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2}\,2y\right) dy\,dx$

$= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1} (3r\cos\theta . r - 3r\sin\theta . r)\,r\,dr\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \left(r^3\cos\theta - r^3\sin\theta\right)\Big|_0^1 d\theta$

$= \int\limits_0^{2\pi} (\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta = \sin\theta + \cos\theta \Big|_0^{2\pi} = 0$



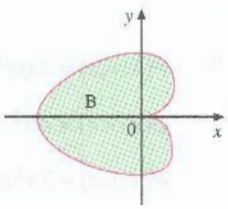
9. (a) $\oint\limits_C \left(2y + \sqrt{9+x^3}\right)dx + \left(5x + e^{\arctan y}\right), \quad C \ldots x^2 + y^2 = 4$

$\oint\limits_C \left(2y + \sqrt{9+x^3}\right)dx + \left(5x + e^{\arctan y}\right)dy = \iint\limits_B \left(Q_x - P_y\right)dx dy = \iint\limits_B (5-2)\,dx dy = 3.\pi.4 = 12\pi.$

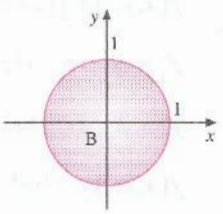
(b) $I = \oint\limits_C y\,dx - x\,dy, \qquad C$ eğrisi $r = 1-\cos\theta$ kardiyoidi

$I = \iint \left(Q_x - P_y\right)dy\,dx = \iint (-1-1)\,dy\,dx = -2\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1-\cos\theta} r\,dr\,d\theta = -2\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-\cos\theta)^2}{2}\,d\theta$

$= -\int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)d\theta = -\left(\theta - 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -3\pi$



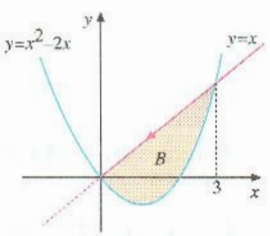
(c) $I = \oint\limits_C 4xy^3\,dx + 6x^2y^2\,dy = \iint\limits_B \left(12xy^2 - 12xy^2\right)dx\,dy = \iint\limits_B 0\,dx\,dy = 0$



(d) $I = \oint\limits_C 3.xy\,dx + 2x^2\,dy \qquad x^2 - 2x = x \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$

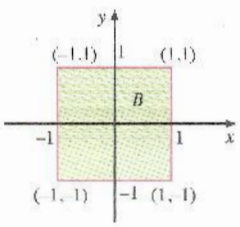
$I = \iint\limits_B (4x - 3y)\,dx\,dy = \int\limits_0^3 \int\limits_{x^2-2x}^{x} x\,dy\,dx = \int\limits_0^3 x\left(3x - x^2\right)dx$

$= x^3 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = 27 - \frac{81}{4} = \frac{27}{4}$



(e) $I = \oint\limits_C \left(x + y^2\right)dx + \left(y + x^2\right)dy = \iint\limits_B (2x - 2y)\,dx\,dy$

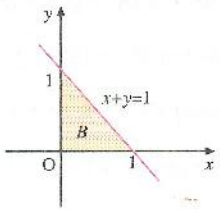
$= 2\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} (x - y)\,dy\,dx = 2\int\limits_{-1}^{1} \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = 2\int\limits_{-1}^{1} 2x\,dx = 0.$



(f) $I = \oint_C \left(x^2 + y^2\right)dx - 2xy\,dy = \iint_B (-2y - 2y)\,dx\,dy$

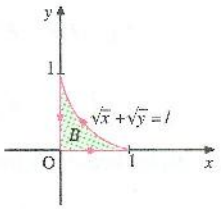
$= -4\int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dx\,dy = -4\int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx$

$= -2\int_0^1 \left(1 - 2x + x^2\right)dx = -2\left(x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$



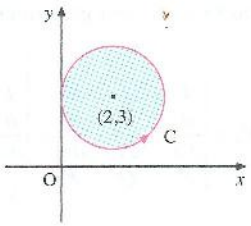
(g) $I = \oint_C e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy = \iint_B \left(e^x \cos y - e^x \cos y\right)dx\,dy$

$= \iint_B 0\,dx\,dy = 0$



(h) $I = \oint_C (x + 6y)dx + (2x + y)dy = \iint_B (2 - 6)\,dx\,dy = -4\iint_B dx\,dy$

$= -4 . alan(B) = -4 . \pi . 4 = -16\pi$



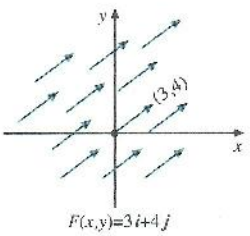
(i) $I = \oint_C \frac{y}{1+x^2}\,dx + \arctan x\,dy = \iint_B \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx\,dy = \iint_B 0\,dx\,dy = 0.$

(i) $I = \oint_C x^2\,dx - y^3\,dy = \iint_B 0\,dx\,dy = 0.$

10. $\oint_C 4x^3y + x^4\,dy, \quad Q_x - P_y = 4x^3 - 4x^3 = 0$

$\oint_C 4x^3y + x^4\,dy = \iint_B 0\,dx\,dy = 0$

11. (a) $F(x,y,z) = 3\,i + 4\,j$ için $\|F\| = 5$ dir. Bu nedenle çizilecek vektörler 5 birim uzunluğunda ve (3,4) vektörüne paralel vektörlerdir.

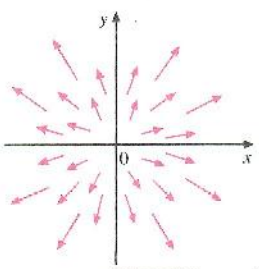


$F(x,y)=3i+4j$

(b) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,i + y\,j) \Rightarrow \|F\| = x^2 + y^2$

Vektörler orijinden uzaklaştıkça boyları büyür.

$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,i + y\,j)$



$F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,i + y\,j)$

12. (a) $curl\,\boldsymbol{F} = (R_y - Q_z)\boldsymbol{i} + (P_z - R_x)\boldsymbol{j} + (Q_x - P_y)\boldsymbol{k}$

$div\,(curl\boldsymbol{F}) = (R_y - Q_z)_x + (P_z - R_x)_y + (Q_x - P_y)_z = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0$

(b) $grad f = f_x\,\boldsymbol{i} + f_y\,\boldsymbol{j} + f_z\,\boldsymbol{k}$

$curl(grad f) = [(f_z)_y - (f_y)_z]\,\boldsymbol{i} + [(f_x)_z - (f_z)_x]\,\boldsymbol{j} + [(f_y)_x - (f_x)_y]\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$

(c) $div(f\boldsymbol{F}) = (f\boldsymbol{F})_x + (f\boldsymbol{F})_y + (f\boldsymbol{F})_z$

$$= \left(f_x\boldsymbol{F} + f\boldsymbol{F}_x\right) + \left(f_y\boldsymbol{F} + f\boldsymbol{F}_y\right) + \left(f_z\boldsymbol{F} + f\boldsymbol{F}_z\right)$$

$$= \left(f_x + f_y + f_z\right)\boldsymbol{F} + f\left(\boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z\right) = (grad f)\,\boldsymbol{F} + f\,div\,\boldsymbol{F}$$

(ç), (d), (e) benzer biçimde gösterilebilir.

13. $\boldsymbol{B} = curl\boldsymbol{G}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$Curl\boldsymbol{G} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)\boldsymbol{j} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{B}(x, y, z)$$

olduğundan G fonksiyonu $\boldsymbol{B}$ için bir vektör potansiyelidir.

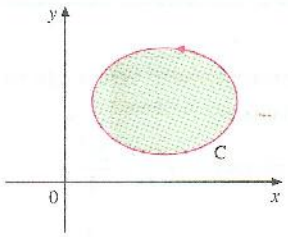
EĞRİSEL İNTEGRALİN UYGULAMALARI

ALAN HESABI

C, alanı istenen bölgenin çevre eğrisi ise söz konusu bölgenin alanı

$$A = \int_C x\,dy - y\,dx$$

olur.



YAY UZUNLUĞU HESABI

C bir düzgün eğri ve L bu eğrinin uzunluğu ise

$$L = \int_C dl$$

olur.

KÜTLE HESABI

C eğrisi üzerine yerleştirilmiş bir telin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x,y,z)$ ise bu telin M kütlesi

$$M = \int \sigma(x,y,z)\,dl$$

olur.

AĞIRLIK MERKEZİ HESABI

C eğrisi üzerine yerleştirilmiş bir telin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z)$ ise ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\,\sigma(x,y,z)\,dl, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\,\sigma(x,y,z)\,dl, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\int_C z\,\sigma(x,y,z)\,dl$$

dir.

EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESABI

$$I_x = \int_C (y^2+z^2)\,\sigma\,dl, \quad I_y = \int_C (x^2+z^2)\,\sigma\,dl, \quad I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\sigma\,dl, \quad I_0 = \int_C (x^2+y^2+z^2)\,\sigma\,dl$$

İŞ HESABI

F kuvvetinin etkisi altında kalan bir parçacığın, C eğrisinin başlangıcından bitim noktasına varıncaya kadar yapılan iş

$$W = \int_C F.dr = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

olur.

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

PROBLEMLER

• Eğrisel İntegralin Uygulamaları

1. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $r(t) = t\,i + t^2 j + \frac{2t^3}{3} k, \quad 0 \le t \le 2$

(b) $r(t) = t\,i + \frac{t^2}{\sqrt{2}} j + \frac{t^3}{3} k, \quad 0 \le t \le 2$

(c) $r(t) = t\,i + \frac{3}{2}t^2 j + \frac{3}{2}t^3 k, \quad 0 \le t \le 2$

(d) $r(t) = t\,i + \frac{t^2}{2} j + \frac{t^3}{6} k, \quad 0 \le t \le 6$

(e) $r(t) = t\cos t\,i + t\sin t\,j + t\,k, \quad 0 \le t \le \pi$

(f) $r(t) = t\,i + \ln(\sec t + \tan t) j + \ln \sec k, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

(g) $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ yüzeylerinin arakesit eğrisinin (0,0,0) noktasını (3,3,2) noktasına birleştiren parçası

2. $r(t) = \cos^3 t\,i + \sin^3 t\,j, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanı eğrisel integral yardımıyla hesaplayınız.

3. $r(t) = \left[2\cos t(1 - \cos t) + 1\right] i + \left[2\sin t(1 - \cos t)\right] j \quad 0 \le t \le 2\pi$

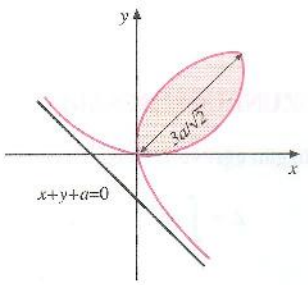
kardioyoid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

4. $r(t) = a(2\cos t - \cos 2t)i + (2\sin t - \sin 2t)\,j, \quad 0 \le t \le 2\pi$

eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

5. $(x + y)^3 = axy$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz [*YG*. $y = tx$ yazarak eğrinin parametrik denklemini bulunuz.]

6. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$ Descartes Yaprağı tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.



[*YG* : $y = tx$ koyarak eğrinin parametrik denklemini yazınız.)

7. Bir parçacık

$$F = \frac{x\,i + y\,j}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

kuvvetinin etkisi altında

$C... r(t) = e^t \cos t\,i + e^t \sin t\,j$

eğrisi boyunca $A(1,0)$ noktasından $B(e^{2\pi}, 0)$ noktasına taşındığında yapılan işi hesaplayınız.

8. Birinci bölgede $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi üzerine yerleştirilmiş bir ince telin (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y) = xy$ dir. Bu telin kütlesini, ağırlık merkezini ve eksenlere göre eylemsizlik momentlerini hesaplayınız.

9. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ Astroid eğrisinin birinci abölgedeki parçası üzerine yerleştirilmiş bir ince telin (x, y) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y) = x + y$ dir. Telin kütlesini, ağırlık merkezini ve eksenlere göre eylemsizlik momentlerini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $r(t) = t\,i + t^2\,j + \dfrac{2t^3}{3}\,k \qquad 0 \le t \le 2$

$r'(t) = t\,i + 2t\,j + 2t^2\,k \;\Rightarrow\; \|r'(t)\| = \left(1 + 4t^2 + 4t^4\right)^{1/2} = 1 + 2t^2$

$\ell = \displaystyle\int_0^2 \|r'(t)\|\,dt = \int_0^2 \left(1 + 2t^2\right)dt = \left(t + \frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^2 = 2 + \frac{16}{3} = \frac{22}{3}$

(b) $r(t) = t\,i + \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}\,j + \dfrac{t^3}{3}\,k, \qquad 0 \le t \le 2$

$r'(t) = i + \sqrt{2}t\,j + t^2\,k, \;\Rightarrow\; \|r'(t)\|^2 = 1 + 2t^2 + t^4 = \left(1 + t^2\right)^2 \;\Rightarrow\; \|r'(t)\| = 1 + t^2$

$l = \displaystyle\int_C dl = \int_0^2 \|r'(t)\|\,dt = \int_0^2 \left(1 + t^2\right)dt = t + \frac{1}{3}t^3\Big|_0^2 = 4$

(c) $r(t) = t\,i + \dfrac{3}{2}t^2\,j + \dfrac{3}{2}t^3\,k, \;\; 0 \le t \le 2$

$r'(t) = i + 3t\,j + \dfrac{9}{2}t^2\,k \;\Rightarrow\; \|r'(t)\|^2 = 1 + 9t^2 + \dfrac{81}{4}t^4 = \left(1 + \dfrac{9}{2}t^2\right)^2 \;\Rightarrow\; \|r'(t)\| = 1 + \dfrac{9}{2}t^2$

$l = \displaystyle\int_0^2 \left(1 + \frac{9}{2}t^2\right)dt = t + \frac{3}{2}t^3\Big|_0^2 = 2 + 12 = 14.$

(d) $r'(t) = i + t\,j + \dfrac{t^2}{2}\,k \Rightarrow \|r'\| = \left(1 + t^2 + \dfrac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{t^2}{2}$

$l = \displaystyle\int_0^6 dl = \int_0^6 \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)dt = \left(1 + \frac{t^3}{6}\right)\Big|_0^6 = 42$

(e) $r(t) = t\cos t\,i + t\sin t\,j + t\,k, \qquad 0 \le t \le \pi$

$r'(t) = (\cos t - t\sin t)\,i + (\sin t + t\cos t)\,j + k$

$\|r'(t)\|^2 = (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1 = 2 + t^2 \;\Rightarrow\; \|r'(t)\| = \sqrt{2 + t^2}$

$l = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2 + t^2}\;\; dt = \frac{t}{2}\sqrt{2 + t^2} + \ln\left|t + \sqrt{2 + t^2}\right|\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2 + \pi^2} + \ln\left(\pi + \sqrt{2 + \pi^2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2$

(f) $r(t) = t\,i + \ln(\sec t + \tan t)\,j + \ln\sec t\,k \Rightarrow r'(t) = i + \sec t\,j + \tan t\,k$

$\|r'(t)\|^2 = 1 + \sec^2 t + \tan^2 t = 1 + \dfrac{1}{\cos^2 t} + \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{2}{\cos^2 t} \Rightarrow \|r'(t)\| = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos t}$

$l = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \|r'(t)\|\,dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}\;\; dt = \sqrt{2}\ln\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right|\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\ln\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

(g) $r(t) = t\,i + \frac{1}{3}t^2 j + \frac{2}{27}t^3 k\ ,\ 0 \le t \le 3$

$r'(t) = i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{9}t^2 k \ \Rightarrow\ \|r'\| = 1 + \frac{2}{9}t^2$

$$l = \int_0^3 \|r'(t)\|dt = \int_0^3 \left(1 + \frac{2}{9}t^2\right)dt = \left(t + \frac{2}{27}t^3\right)\Big|_0^3 = 5$$

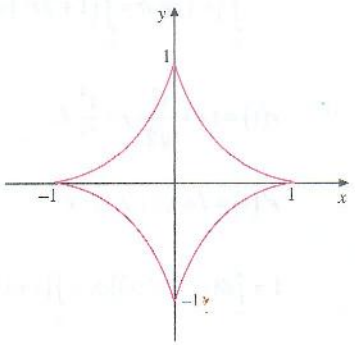
2. $r(t) = \cos^2 t\,i + \sin^3 t\,j \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$x = \cos^3 t \Rightarrow dx = -3\cos^2 t.\sin t\ dt$

$y = \sin^3 t \Rightarrow dy = 3\sin^2 t\cos t\,dt$

$$A = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3\sin^2 t\cos^4 t + 3\cos^2 t\sin^4 t\right)dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(\sin 2t)^2}{4}dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{3}{8}\pi$$



3. $r(t) = \left[2\cos t(1-\cos t)+1\right]i + \left[2\sin t(1-\cos t)\right]j,\ \ 0 \le t \le 2\pi$

$x = 2\cos t(1-\cos t)+1 \Rightarrow dx = (\sin t + 4\cos t\ \sin t)dt,$

$y = 2\sin t(1-\cos t) \Rightarrow dy = \left(2\cos t - 2\cos^2 t + 2\sin^2 t\right)dt$

$$A = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-8\cos^3 t + 6\sin^2 t + 4\cos^4 t + 4\cos^2 t\sin^2 t + 2\cos t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-8\cos^3 t + 6\sin^2 t + 4\cos^2 t + 2\cos t\right)dt = \int_0^{2\pi}\left[-4\cos t + 4\sin^2 t + \sin^2 t + \cos t\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[5.\frac{1-\cos 2t}{2} - 3\cos t dt\right] = \frac{5}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2t}{2}\right) - 3\sin t\ \Big|_0^{2\pi} = \frac{5}{2}.2\pi = 5\pi$$

4. $r(t) = a(2\cos t - \cos 2t)i + a(2\sin t - \sin 2t)j \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$x = a(2\cos t - \cos 2t) \quad \Rightarrow \quad dx = (-2a\sin t + 2a\sin 2t)dt$

$y = a(2\sin t - \sin 2t) \quad \Rightarrow \quad dy = (2a\cos t - 2a\cos 2t)dt$

$$A = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2a^2\left[3 - 3(\cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t)\right]dt = 3a^2\int_0^{2\pi}(1-\sin 3t)dt = 6\pi a^2$$

5. $y=tx$ yazılırsa $(x+tx)^3=axtx \Rightarrow x^3(1+t)^3=atx^2 \Rightarrow x=\dfrac{at}{(1+t)^3}$ bulunur. Şu halde eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x=\dfrac{at}{(1+t)^3} \\ y=\dfrac{at^2}{(1+t)^3} \end{cases}$$

olur. $x=y$ için $t=0 \vee t=1$ dir. Buna göre

$$A=\int_C x\,dy-y\,dx=\int_0^1\left[\frac{at}{(1+t)^3}\cdot\frac{2at(1+t)^3-3(1+t)^2at^2}{(1+t)^6}-\frac{at^2}{(1+t)^3}\cdot\frac{a(1+t)^3-3(1+t)^2.at}{(1+t)^6}\right]dt$$

$$=a^2\int_0^1\frac{t^2}{(1+t)^6}\,dt=a^2\int_1^2\frac{(u-1)^2}{u^6}\,du=a^2\int_1^2\frac{u^2-2u+1}{u^6}=a^2\int_1^2\left(u^{-4}-2u^{-5}+u^{-6}\right)du$$

$$=a^2\left(-\frac{1}{3u^3}+\frac{1}{2u^4}-\frac{1}{5u^5}\right)\Bigg|_1^2=\frac{a^2}{60}\ .$$

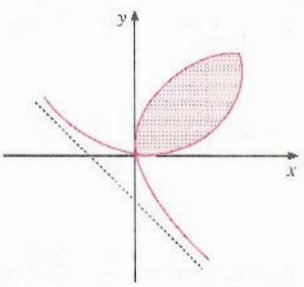
6. $x^3+y^3-3axy=0 \quad (a>0)$ *(Descartes yaprağı)*

$y=tx$ yazılırsa $x^3+t^3x^3-3ax^2t=0 \Rightarrow x=\dfrac{3at}{t^3+1} \Rightarrow y=\dfrac{3at^2}{t^3+1}$

parametrik gösterimi elde edilir. $x=y \Rightarrow t=0 \vee t=1$ dir.

$$dx=\frac{3at^3+3a-9at^3}{\left(t^3+1\right)}dt=\frac{6at-3at^4}{\left(t^3+1\right)^2}dt$$

$$dy=\frac{6at^4+6at-9at^4}{\left(t^3+1\right)^2}dt=\frac{6at-3at^4}{\left(t^3+1\right)^2}dt$$



$$A=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx=2.\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{18a^2t^2-9a^2t^5}{\left(t^3+1\right)^3}-\frac{9a^2t^2-18a^2t^5}{\left(t^3+1\right)^3}\right)dt$$

$$=2.\frac{1}{2}\int_0^1\frac{9a^2t^2\,9a^2t^5}{\left(t^3+1\right)^3}dt=2.\frac{9a^2}{2}\int_0^1\frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}dt=2.\frac{3}{2}a^2\left(-\frac{1}{t^3+1}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}a^2$$

7. $w=\int_C F.dr, \quad F=\dfrac{xi+yj}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}, \quad r(t)=e^t\cos t\,i+e^t\sin t\,j, \quad A(1,0), \quad B\left(e^{2\pi},0\right)$

Önce t parametresinin değişim aralığını bulalım:

$$\left.\begin{matrix} e^t\cos t = 1 \\ e^t \sin t = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t = 0, \qquad \left.\begin{matrix} e^t\cos t = e^{2\pi} \\ e^t \sin t = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t = 2\pi$$

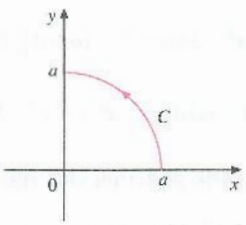
$$r'(t) = \left(e^t\cos t - e^t \sin t\right)i + \left(e^t \sin t + e^t \cos t\right)j = e^t\left(\cos t - \sin t\right)i + e^t\left(\cos t + \sin t\right)j.$$

$$W = \int_C F.dr = \int_0^{2\pi} \frac{e^t\cos t\, i + e^t \sin t\, j}{e^{3t}}.\left[e^t\left(\cos t - \sin t\right)i + e^t\left(\cos t + \sin t\right)j\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-t}\left[\cos^2 t - \cos t\sin t + \sin t\cos t + \sin^2 t\right]dt = \int_0^{2\pi} e^{-t}dt = 1 - e^{-2\pi}.$$

8. $\sigma(x,y) = xy. \quad r(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \qquad \|r'(t)\| = a$

$$M = \int_C \sigma(x,y)dl = \int_0^{\pi/2} a\cos t.a\sin t.a\,dt = a^3.\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{2}$$



$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\sigma(x,y)dl = \frac{2}{a^3}\int_0^{\pi/2} a\cos t\left(a^2\cos t\sin t\right)a\,dt = 2a\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$= 2a\left(\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2a}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\sigma(x,y)dl = \frac{2}{a^3}\int_0^{\pi/2} a\sin t\left(a^2\cos t\sin t\right)adt = 2a\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,dt$$

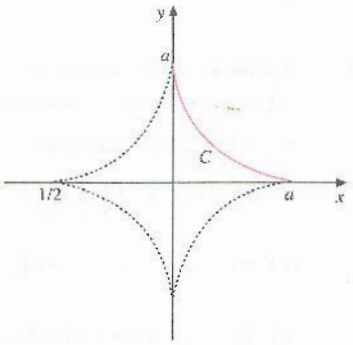
$$= 2a\left(\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2a}{3}.$$

Ağırlık merkezi $\left(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$ noktasıdır.

$$I_x = \int_C y^2\sigma(x,y)dl = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t.a^2\cos t\sin t.a\,dt = a^5\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\cos t\,dt = a^5\frac{1}{4}\sin^4 t\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^5}{4}$$

$$I_y = \int_C x^2\sigma(x,y)dl = \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t.a^2\cos t\sin t.adt = a^5\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\sin t\,dt = a^5\left(-\frac{1}{4}\cos^4 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^5}{4}\text{ olur.}$$

9. Astroid parçasının parametrik denklemi $r(t) = a\cos^3 t\, i + a\sin^3 t\, j$, $0 \le t \le \pi/2$ dir.



$$M = \int_C \sigma(x,y)\,dl = \int_C \sigma(x(t),y(t))\|r'(t)\|\,dt \text{ olacaktır.}$$

$$r' = -3a\cos^2 t\sin t\, i + 3a\sin^2 t\cos t\, j,$$

$$\|r'\| = 3a\left(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t\right)^{1/2} = 3a\sin t\cos t$$

$$M = \int_0^{\pi/2}\left(a\cos^3 t + a\sin^3 t\right)3a\sin t\cos t\,dt = 3a^2\int_0^{\pi/2}\left(\cos^4 t\sin t + \sin^4 t\cos t\right)dt$$

$$= 3a^2\left(-\frac{1}{5}\cos^5 t + \frac{1}{5}\sin^5 t\right)\Big|_0^{\pi/2} = 3a^2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}a^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\sigma(x,y)\,dl = \frac{5}{6a^2}\int_0^{\pi/2} a\cos^3 t\left(a\cos^3 t + a\sin^3 t\right)3a\sin t\cos t\,dt$$

$$= \frac{5}{6a^2}.3a^3\int_0^{\pi/2}\left(\cos^7 t\sin t + \cos^4 t\sin^4 t\right)dt = \frac{5a}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos^8 t\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{5a}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^4 t\,dt$$

$$= \frac{5a}{16} + \frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^4 t\,dt \quad \text{olur.}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^4 t\,dt = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 2t\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1-2\cos^2 2t+\cos^4 2t\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1-2.\frac{1+\cos 4t}{2}+\frac{3}{2}+2\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 8t\right)dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 8t\right)dt = \frac{1}{4}.\frac{3}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

olduğundan $\bar{x} = \frac{5a}{16} + \frac{5a}{2}.\frac{3\pi}{16} = \frac{5a}{16} + \frac{15a\pi}{32} = \frac{5a}{16}\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)$ *dir.*

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\sigma(x,y)\,dl = \frac{5}{6a^2}\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\left(a\sin^3 t + a\cos^3 t\right)3a\sin t\cos t\,dt$$

$$= \frac{5}{6a^2}.3a^3\int_0^{\pi/2}\sin^7 t\cos t\,dt + \frac{5a}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^4 t\,dt = \frac{5a}{16} + \frac{15a\pi}{32} = \frac{5a}{16}\left(1+\frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{bulunur.}$$

$$I_x = \int_C y^2\sigma(x,y)\,dl = \int_0^{\pi/2} a^2\cos^6 t\left(a\cos^3 t + a\sin^3 t\right)3a\cos t\sin t\,dt = a^4\int_0^{\pi/2}\left(\cos^{10} t\sin t + \cos^7 t\sin^4 t\right)dt$$

$$= a^4\left[-\frac{1}{\pi}\cos^{11} t\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 t\right)^3\sin^4 t\cos t\,dt\right] = \frac{a^4}{11} + \int_0^1\left(1-u^2\right)^3 u^4\,du = \frac{a^4}{11}\left[1+\int_0^1\left(u^4-3u^6+3u^6+3u^8-u^{10}\right)du\right]$$

$$= \frac{a^4}{11}\left[1+\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{3}{7}u^7+\frac{1}{3}u^9-\frac{1}{11}u^{11}\right)\Big|_0^0\right] = \frac{a^4}{11}\left[1+\frac{1}{5}-\frac{3}{7}+\frac{1}{3}-\frac{1}{11}\right] = \frac{a^4}{11}.\frac{1166}{1155} = \frac{106}{1155}a^4.$$

I_y benzer biçimde hesaplanır.

byns

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki vektör alanlarının birer tutarlı (konservatif) vektör alanı olduğunu gösteriniz.

$\nabla f = \mathbf{F}$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunu bulunuz.

(a) $F(x, y) = \left(x^3 + \frac{y}{x}\right)i + \left(y^2 + \ln x\right)j$

(b) $F(x, y) = \left(1 + ye^{xy}\right)i + \left(2y + xe^{xy}\right)j$

(c) $F(x, y) = \left(\cos x + \ln y\right)i + \left(\frac{x}{y} + e^y\right)j$

(d) $F(x, y) = \left(x + \arctan y\right)i + \frac{x+y}{1+y^2}j$

2. $F = P\,i + Q\,j$ vektör alanı tutarlı olduğunda

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

olacağını gösteriniz.

3. $F = P\,i + Q\,j + R\,k$ vektör alanı tutarlı olduğunda

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

olacağını gösteriniz.

4. $F = P\,i + Q\,j + R\,k$ ile $r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k$ vektörleri arasındaki açının ölçüsü θ olsun.

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\cos\theta\, d\ell$$

olacağını gösteriniz.

5. Curl (grad f) $= 0$ olduğunu gösteriniz.

6. grad $f(x, y, z) = (2xy + z^2)\,i + x^2 j + (2xz + \pi\cos\pi z)\,k$ eşitliğini sağlayan $f(x, y, z)$ ifadesini hesaplayınız.

7. m ve w birer sabit olmak üzere

$$f(x,y,z) = \frac{mw^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

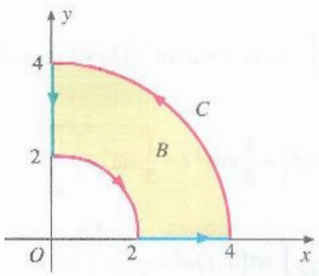
fonksiyonunun $F(x, y, z) = mw^2(xi + yj + zk)$ vektör alanı için bir potansiyel fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

8. $z = f(x, y)$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. f, Laplace denklemini sağlayan bir fonksiyon olduğunda

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = 0$$

olacağını gösteriniz. Burada C bir kapalı eğridir.

9. $B = \{(x, y) : 4 \le x^2 + y^2 \le 16,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ bölgesinin sınırı C olsun.



$$I = \oint_C \sqrt{4x^2 + y^2}\,(2x\,dx - y\,dy)$$

integralini

(a) doğrudan

(b) Green Teoreminden yararlanarak

hesaplayınız.

10. C eğrisi $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi olup yönü saat yönünün tersidir.

$$\oint_C \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2 + y^2}$$

integralini hesaplayınız.

11. C eğrisi $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ lemniskatının sağ ilmeği olup saatin çalışma yönünün ters yönünde yönlendirilmiştir.

$$\oint_C \frac{xy(y\,dx - x\,dy)}{x^2 + y^2}$$

integralini hesaplayınız.

12. C, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi üzerinde herhangi bir eğri parçası olsun.

$$F(x,y,z) = k\frac{xi + yj + zk}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

vektör alanının, bir parçacığı C üzerinde başlangıç noktasından bitim noktasına kadar götürdüğünde yapılan iş ne olur?

ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x,y)=\int\left(x^3+\frac{y}{x}\right)dx=\frac{1}{4}x^4+y\ln x+y\ln x+\varphi(y)$

$f_y(x,y)=\ln x+\varphi'(y)=y^2+\ln x\Rightarrow\varphi'(y)=y^2\Rightarrow\varphi(y)=\frac{1}{3}y^3 \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=\frac{1}{4}x^4+y\ln x+\frac{1}{3}y^3$ ...

(b) $f(x,y)=\int(1+ye^{xy})dx=x+e^{xy}+\varphi(y)$

$f_y(x,y)=xe^{xy}+\varphi'(y)=2y+xe^{xy}\Rightarrow\varphi'(y)=2y\Rightarrow\varphi(y)=y^2 \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=x+e^{xy}+y^2$ olur.

(c) $f(x,y)=\int(\cos x+\ln y)dx=\sin x+x\ln y+\varphi(y)$

$f_y(x,y)=\frac{x}{y}+\varphi'(y)=\frac{x}{y}+e^y\Rightarrow\varphi'(y)=e^y\Rightarrow\varphi(y)=e^y \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=\sin x+x\ln y+e^y$ olur.

(d) $f(x,y)=\int(x+\arctan y)dx=\frac{x^2}{2}=x\arctan y+\varphi(y)$

$f_y(x,y)=\frac{x}{1+y^2}+\varphi'(y)=\frac{x+y}{1+y^2}=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+y^2}\Rightarrow\varphi'(y)=\frac{y}{1+y^2} \quad\Rightarrow\quad \varphi'(y)=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$

$f(x,y)=\frac{x^2}{x}+x\arctan y+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$

2. F = Pi + Qj tutarlı olduğunda öyle bir f fonksiyonu vardır ki $f_x = P$ ve $f_y = Q$ dur. Buradan

$f_{xy}=P_x$ ve $f_{yx}=Q_x$ olur. $f_{xy}=f_{yx}$ olacağından $P_x=Q_x$ dir.

3. $F=Pi+Qj+Rk$ tutarlı olduğunda sürekli türevlere sahip öyle bir f fonksiyonu vardır ki $f_x=P$, $f_y=Q$, $f_z=R$ dir. Buradan $f_{xy}=P_y$, $f_{yx}=Q_x$, $f_{xz}=P_z$, $f_{zy}=R_y$ ve $f_{zx}=R_x$ dir. Buradan $P_y=Q_x$, $P_z=R_x$ ve $Q_z=R_y$ bulunur.

4. T teğet birim vektör olmak üzere $\int_C F\cdot dr=\int_C F\cdot T\,d\ell$ olduğunu biliyoruz.

$F\cdot T=\|F\|\|T\|\cos\theta=\|F\|\cos\theta=\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta$ olacağından

$\int_C F\cdot dr=\int_C F\cdot T\,d\ell=\int_C\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cos\theta\,d\ell$

bulunur.

5. grad $f=\dfrac{\partial f}{\partial x}i+\dfrac{\partial f}{\partial y}j+\dfrac{\partial f}{\partial z}k$ olduğundan

$$\text{curl}(\text{grad}\, f)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)i-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)j+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)k=0$$

olur.

6. $f(x,y,z)=\int(2xy+z^2)dx=x^2y+xz^2+\varphi(y,z)$

$f_y(x,y,z)=x^2+\varphi_y(y,z)=x^2\Rightarrow\varphi_y(y,z)=0\Rightarrow\varphi(y)=\psi(z)\Rightarrow f(x,y,z)=x^2y+xz^2+\psi(z)$

$f_z(x,y,z)=2xz+\psi'(z)=2xz+\cos\pi z\Rightarrow\psi'(z)=\cos\pi z\Rightarrow\psi(z)=\dfrac{1}{\pi}\sin\pi z$ olur.

$f(x,y,z)=x^2y+z^2+\dfrac{1}{\pi}\sin\pi z$ bulunur.

7. grad $f=\text{mw}^2\text{x}\,i+\text{mw}^2\text{y}\,j+\text{mw}^2\text{z}\,k=\text{mw}^2(\text{x}\,i+\text{y}\,j+\text{z}\,k)=\text{F(x,y,z)}$ olduğundan f, F için bir potansiyel fonksiyondur.

8. f, Laplace denklemini sağlıyorsa $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ olur.

$P(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $Q(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ denirse $Q_x-P_y=-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=0$ olur. Green teoreminden

$$\int_c \frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy=\iint_B-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\iint_B 0.dx\,dy=0$$

bulunur.

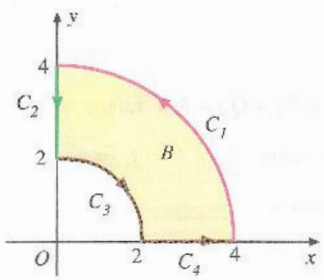
9. (a) $\int_C=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}$

$C_1\ldots r_1(t)=4\cos t\,i+4\sin t\,j,\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$

$C_2\ldots r_2(t)=-t\,j,\ 2\le t\le 4$

$C_3\ldots r_3(t)=2\cos t\,i+2\sin t\,j,\ \dfrac{\pi}{2}\le t\le 0$

$C_4\ldots r_4(t)=t\,i,\ 2\le t\le 4$



$$\int_{C_1}\sqrt{4x^2+y^2}\,(2xdx-ydy)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{64\cos^2 t+16\sin^2 t}\,t(-32\cos t\sin t\,dt-16\sin t\cos t\,dt)$$

$$=-192\int_0^{\pi/2}\sqrt{4\cos^2 t+\sin^2 t}\,\sin t\cos t\,dt=-192\int_0^{\pi/2}\sqrt{3\cos^2 t+1}\,\sin t\cos t\,dt$$

$$=\frac{192}{6}(3\cos^2 t+1)^{3/2}.\frac{2}{3}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{64}{3}(1-8)=-\frac{448}{3}$$

$\int_{C_2}\sqrt{4x^2+y^2}\,(2xdx-ydy)=\int_2^4\sqrt{t^2}\,(-tdt)=-\int_2^4 t^2dt=-\frac{t^3}{3}\Big|_2^4=-\frac{56}{3}$ bulunur. Benzer biçimde hesaplanarak

$\int_{C_3}\sqrt{4x^2+y^2}\,(2xdx-ydy)=-\frac{56}{3}$ ve $\int_{C_4}\sqrt{4x^2+y^2}\,(2xdx-ydy)=\frac{224}{3}$ bulunur.

$\int_C\sqrt{4x^2+y^2}\,(2xdx-ydy)=-\frac{224}{3}-\frac{56}{3}-\frac{56}{3}+\frac{224}{3}=-\frac{112}{3}$ olur.

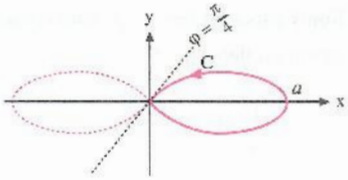
(b) $P=2x\sqrt{4x^2+y^2}$, $Q=-y\sqrt{4x^2+y^2}$, $Q_x-P_y=-\frac{4xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}-\frac{2xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}=6\frac{xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}$

$$\int_C\sqrt{4x^2+y^2}\,(2xdx-ydy)=-6\iint_B\frac{xy}{\sqrt{4x^2+y^2}}dxdy=-6\int_0^{\pi/2}\int_{r=2}^4\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{4r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}}r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{r^3}{3}\Big|_2^4\frac{-6\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}d\varphi=\frac{56}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{-6\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{56}{3}(1+3\cos^2\varphi)^{1/2}.2\Big|_0^{\pi/3}=\frac{112}{3}(1-2)=-\frac{112}{3}$$

10. C nin parametrik denklemi $r(t)=a\cos t+a\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ olacağından



$$I=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)a\cos t}{a^2}dt=\int_0^{2\pi}-1.dt=-2\pi$$ bulunur.

11. $P=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$, $Q=-\frac{x^2y}{x^2+y^2}$, $Q_x=-\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)}$, $P_y=-\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$, $Q_x-P_y=\frac{2x^3y-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_B\frac{2x^3y-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}dxdy=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}\frac{2r^3\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{r^4}rdrd\varphi$$

$$=2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin2\varphi\cos2\varphi\,r\Big|_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}d\varphi=2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin2\varphi\cos2\varphi\;a\sqrt{\cos2\varphi}\,d\varphi=0$$

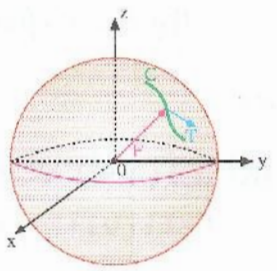
olur, zira fonksiyon tek fonksiyon olup integrasyon sınırları simetriktir.

12. $\int_C F\cdot dr=\int_C F\cdot T\,d\ell$

F orijinden küre yüzeyine doğru yönlendirilmiş bir vektör.

T de küreye teğet olacağından her noktada $F\perp T$ dir.

Dolayasıyla $F.T=0$ dır. Buna göre



$$\int_C F\cdot dr=\int_C F\cdot T\,d\ell=\int_C 0.d\ell=0$$

olacaktır.

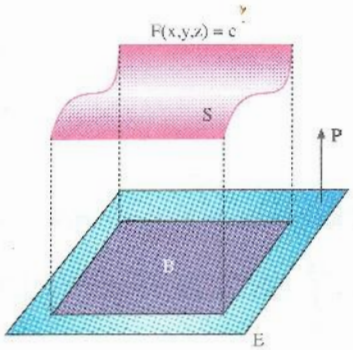
byns

16 YÜZEY İNTEGRALLERİ

REEL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN YÜZEY İNTEGRALLERİ

E, üç boyutlu uzayda bir düzlem, p bu düzlemin bir normali olsun. $F(x,y,z) = c$ denklemiyle tanımlanan S yüzeyinin E üzerindeki dik izdüşümü B olsun. S üzerinde tanımlı bir g fonksiyonu için

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k$$



limiti varsa bu limite g fonksiyonunun S üzerindeki **birinci çeşit yüzey integrali** denir,

$$\iint_S g(x,y,z)ds$$

ile gösterilir. Burada (x_k, y_k, z_k), S_k bölgesinde alınan herhangi bir noktadır.

$$\iint_S g(x,y,z)ds = \iint_B \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F.P|} dA$$

dır. Eğer S yüzeyinin denklemi $z = f(x,y)$ biçiminde verilir ve E düzlemi olarak xOy düzlemi alınırsa

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_B g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

olur. Eğer S yüzeyinin denklemi $y = f(x,z)$ ve S nin xOz düzlemindeki dik izdüşümü G ise

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_G g(x, f(x,z), z)\sqrt{1+f_x^2+f_z^2}\,dxdz$$

olur.

İKİNCİ ÇEŞİT YÜZEY İNTEGRALLERİ

$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, normali $\mathbf{n}$ olan bir yönlü S yüzeyi üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun.

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\ ds$$

integraline $\mathbf{F}$ vektör alanının S yüzeyi üzerindeki **ikinci çeşit yüzey integrali** denir.

byns

PROBLEMLER

- Birinci Çeşit Yüzey integralleri
- ikinci Çeşit Yüzey integralleri

1. S yüzeyi, $x + y + z = 1$ düzleminin birinci bölgedeki parçası olduğuna göre $g(x, y, z) = x$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

2. $g(x, y, z) = z\,(x^2 + y^2)$ fonksiyonunun $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ yarıküresi üzerindeki integralini hesaplayınız.

3. S yüzeyi, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $z = 0$ ve $z = x + 2$ düzlemleri arasındaki parçası olduğuna göre

$$\iint_S xz \; ds$$

integralini hesaplayınız.

4. S yüzeyi $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$ ve $z = a$ düzlemleri tarafından sınırlanan küp olduğuna göre $g(x, y, z) = x + y + z$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

5. S yüzeyi $y^2 + 4z = 16$ silindirinin $x = 0, x = 1$ ve $z = 0$ düzlemleri arasında kalan parçası olduğuna göre

$$\iint_S x\sqrt{y^2 + 4}\; ds$$

integralini hesaplayınız.

6. S yüzeyi, $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = y$ düzlemi altında kalan parçası olduğuna göre

$g(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

7. S yüzeyi, $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $x^2 + y^2 = 4$ silindirinin iç bölgesinde bulunan parçası olduğuna göre $f(x, y, z) = z$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

8. S yüzeyi, $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleri arasındaki parçası olduğuna göre

$$\iint_S x^2 \; ds$$

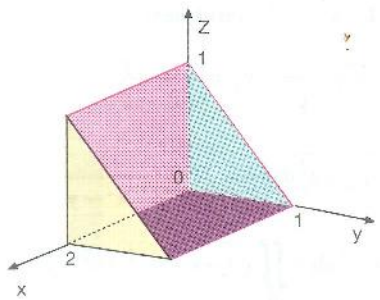
integralini hesaplayınız.

9. S yüzeyinin parametrik denklemi

$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = z$, $0 \le \theta \le 2\pi$,

dir. $0 \le z \le 2$ olduğuna göre $f(x, y, z) = z^2$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.

10. S yüzeyi, aşağıda şekli verilen üçgen prizma olduğuna göre $g(x, y, z) = y + z$ fonksiyonunun S üzerindeki integralini hesaplayınız.



11. S yüzeyi, $z = 4 - y^2$ parabolik silindirinin $x = 0, x = 1$ ve $z = 0$ düzlemleri arasında kalan parçası olup bu yüzey yukarı doğru yönlendirilmiştir. (n normali yukarı doğru yönlendirilmiştir.)

$\boldsymbol{F}(x, y, z) = z^2\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j} - 3\,z\,\boldsymbol{k}$ alanının S üzerindeki integralini hesaplayınız.

12. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi, yönü kürenin dışına doğru olan normalle yönlendirilmiştir. Bu yüzey üzerinde aşağıda verilen vektör alanlarının integralini hesaplayınız.

(a) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z\,\boldsymbol{k}$

(b) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\,\boldsymbol{i} - x\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

(c) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$

(d) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xz\,\boldsymbol{i} + yz\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}$

ÇÖZÜMLER

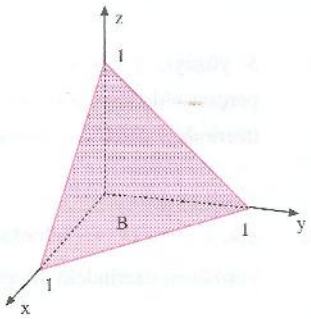
1. (c) $g(x, y, z) = x$

S: yüzeyi $x + y + z = 1$ düzleminin birinci bölgedeki parçası

$z = 1 - x - y, \quad z_x = -1, \quad z_y = -1$

$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \sqrt{3}d = dy$

$$\iint_S x\,ds = \iint_B x\sqrt{3}\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} x\sqrt{3}\,dydx = \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \sqrt{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



2. $g(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$

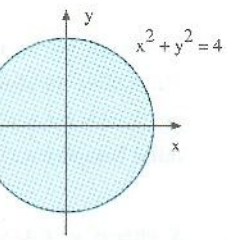
S: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ yarı küresi

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

$$\iint_S z(x^2 + y^2)\,ds = \iint_B \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,.(x^2 + y^2)\frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

$$= 2\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} r^2\,.\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 d\theta = 4\pi.4 = 16\pi$$



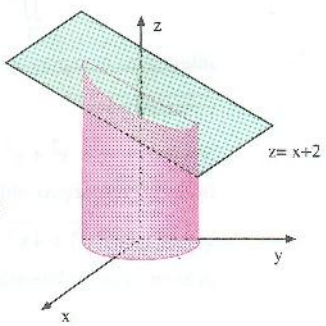
3. $g(x, y, z) = xz, \quad y = f(x, z) = \sqrt{1 - x^2}$

$ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}\,dz\,dx = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx\,dz$ olacağından $S: x^2 + y^2 = 1$ silindirinin

$y = \sqrt{1 - x^2}$ parçasının $z = 0$ ve $z = x + 2$ düzlemleri arasında kısmi üzerindeki yüzey integrali

$$\iint_{S_1} xz\sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2} = \iint_B xz\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dz\,dx = \int_{-1}^{1} \int_{z=0}^{x+2} z\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dz\,dx$$

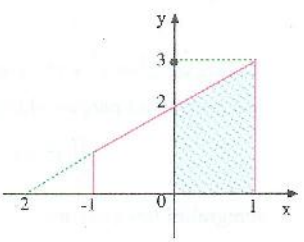
$$= \int_{-1}^{1} \frac{x(x+2)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad (x = \sin t)$$



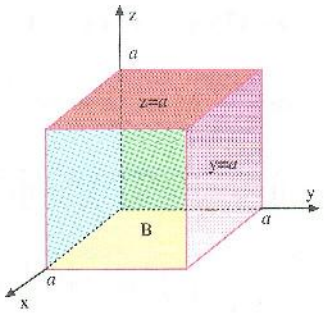
olur. Benzer şekilde, silindirin $y = -\sqrt{1 - x^2}$ denklemli parçası üzerindeki integrali hesaplandığında

$$\iint_{S_2} xz\sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2}\,dx\,dz = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. Bu durumda $\iint_S xz\,ds = \pi$ olur.



4. $z = a,\quad z_x = 0,\quad z_y = 0$

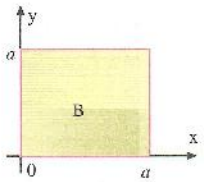


$$\iint_S (x+y+z) = \iint_B (x+y+a)\sqrt{1+0+0}\,dx\,dy$$

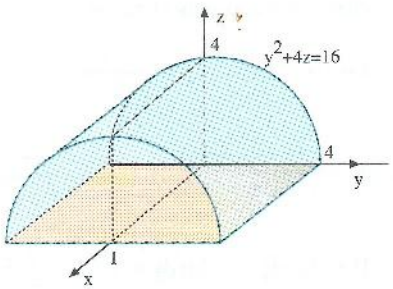
$$= \int_0^a \int_0^a (x+y+a)\,dx\,dy = \int_0^a \left(xy + \frac{y^2}{2} + ay \right) \Big|_0^a dx$$

$$= \int_0^a \left(ax + \frac{a^2}{2} + a^2 \right) dx = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{3}{2}a^2x \Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^3 = 2a^3$$



5. $\iint_S x\sqrt{y^2+4}\,ds = \int_0^1 \int_0^4 x\sqrt{y^2+4}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dy\,dx$

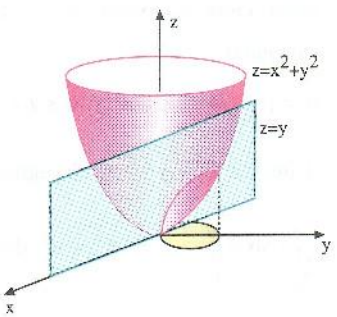


$$= \int_0^1 \int_0^4 x\sqrt{y^2+4}\,\sqrt{1+0+\frac{y^2}{4}}\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^4 x((y^2+4)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\frac{y^3}{3} + 4y \right) \Big|_0^4 dx = \frac{56}{3}\int_0^1 x\,dx = \frac{28}{3}$$

6. $g(x,y,z) = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$, $z_x = 2x$, $z_y = 2y$ dir. B bölgesi



$\Rightarrow y = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$ çemberi tarafından sınırlanan dairedir.

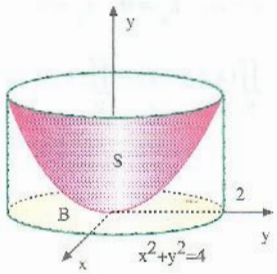
$$\iint_S y(x,y,z)\,ds = \iint_B \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\sin\varphi} (1+4r^2)r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\frac{r^2}{2} + r^4 \Big|_0^{\sin\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi + \sin^4\varphi \right) d\varphi = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{4}(1-\cos 2\varphi) + \frac{1}{4}(1-\cos 2\varphi)^2 \right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \left(\frac{5}{4} - 3\cos 2\varphi + \frac{1}{4}\cos 4\varphi \right) d\varphi = \frac{5}{16}\pi$$

7. $z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 4$



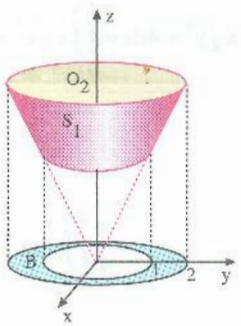
$$ds = \left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^{\frac{1}{2}} dx\,dy = \left(1 + 4x^2 + 4y^2\right)^{\frac{1}{2}} dx\,dy$$

$$\iint_S z\,ds = \iint_B \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\left(1 + 4r^2\right)^{\frac{1}{2}} r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{17} \frac{1}{4}(t-1)t^{1/2}\frac{1}{8}\,dt\,d\varphi = \frac{1}{32}\int_0^{2\pi}\int_1^{17}\left(t^{3/2} - t^{1/2}\right)dt\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}\right)\Bigg|_1^{17} 2\pi = \frac{\pi}{16}\left[\frac{2}{5}\left(17^2\sqrt{17} - 1\right) - \frac{2}{3}\left(17\sqrt{17} - 1\right)\right] = \frac{\pi}{240}\left(1564\sqrt{17} + 4\right)$$

8. $g(x,y,z) = x^2$, $S: z^2 = x^2 + y^2$ koni sinin $z = 1$ ve $z = 2$ düzlemleri arasındaki parçası.



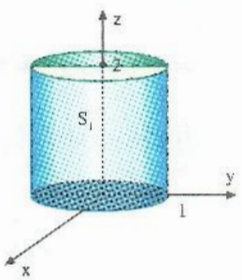
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx dy = \left(1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right)^{1/2} dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$\iint_S x^2\,ds = \iint_B x^2\sqrt{2}\,dx dy = \sqrt{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} r^2\cos^2\varphi.r\,dr\,d\varphi$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}r^4\Bigg|_1^2 \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{15}{4}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{15\sqrt{2}}{8}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{15\sqrt{2}\pi}{4}$$

9. S yüzeyinin yOz düzleminin üst tarafında kalan kısmı S_1, alt tarafında kalan kısmı S_2 olsun. S_1 ve S_2 nin yOz düzlemi üzerindeki dik izdüşümü

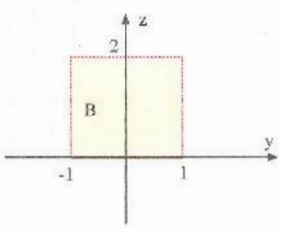


$$B = \{(y,z) : -1 \le y \le 1, \quad 0 \le z < 2\}$$

karesidir. $x^2 + y^2 = 1$ olacağından $x = -\sqrt{1 - y^2}$ dir.

$$\iint_{S_1} z^2\,ds = \iint_B z^2\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\,dy\,dz = \iint_B z^2\sqrt{1 + \frac{y^2}{1 - y^2}}\,dy\,dz = \int_0^2\int_{-1}^{1}\frac{z^2}{\sqrt{1 - y^2}}\,dy\,dz$$

$$= \int_0^2 z^2\arcsin y\Big|_{-1}^{1} dz = \pi\int_0^2 z^2 dz = \pi\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

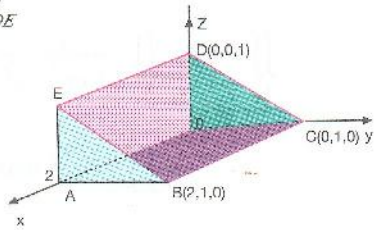


bulunur. Benzer biçimde

$$\iint_{S_2} z^2 ds = \frac{8\pi}{3}$$

olacağı gösterilebilir. $\iint_S z^2 ds = \frac{8\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}$ olur.

10. $\iint_S (y+z)ds = \iint_{ABCO}(y+z)ds + \iint_{AODE}(y+z)ds + \iint_{ABE}(y+z)ds + \iint_{OCD}(y+z)ds + \iint_{BCDE}(y+z)ds$



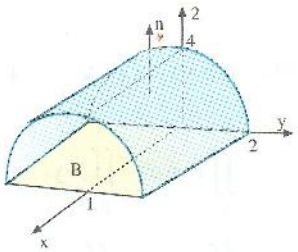
$$= \int_0^2\int_0^1 y\,dydx + \int_0^2\int_0^1 z\,dzdx + \int_0^1\int_0^{1-y}(y+z)dzdy$$

$$+ \int_0^1\int_0^{1-y}(y+z)dzdy + \int_0^2\int_0^1 (y+1-y)\sqrt{1+1}\,dydx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 dx + \int_0^2 \frac{1}{2}z^2\Big|_0^1 dx + \int_0^1 (yz+\frac{1}{2}z^2)\Big|_0^{1-y} dy$$

$$+ \int_0^1 \left(yz+\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_1^{1-y} dy + \int_0^2 \sqrt{2}y\,\Big|_0^1 dx = 1+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+2\sqrt{2} = \frac{8}{3}+2\sqrt{2}$$

11. $z = 4-y^2, \quad z_x = 0, \quad z_y = -2y$



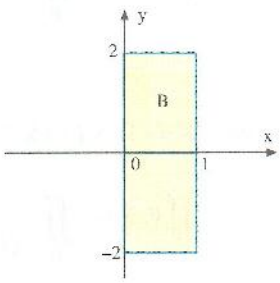
$$\mathbf{n} = \frac{-0.\mathbf{i}+2y\,\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+4y^2}} = \frac{2y\,\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+4y^2}}$$

$\mathbf{F}.\mathbf{n} = 2xy-3z$ olacağından

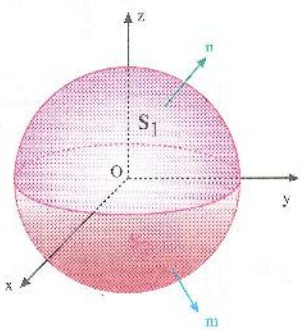
$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iint_S \frac{(2xy-3z)}{\sqrt{1+4y^2}}ds = \iint_B \frac{[2xy-3(4-y^2)]}{\sqrt{1+4y^2}}\sqrt{1+4y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^1\int_{-2}^2 (2xy-12+3y^2)dydx = \int_0^1 (xy^2-12y+y^3)\Big|_{-2}^2 dx$$

$$= \int_0^1 (-32)dx = (-32x)\Big|_0^1 = -32$$



12. S yüzeyi denklemi $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ olan S_1 üst yarı küresi ile denklemi $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ olan S_2 alt yarı küresinin birleşimidir. Üst yarı kürenin normali



$$\mathbf{n} = \frac{-z_x\,\mathbf{i}-z_y\,\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

alt yarı kürenin normali

$$\mathbf{m} = \frac{z_x\mathbf{i}+z_y\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

olacaktır. Yarı kürelerin her ikisinin de xOy düzlemindeki izdüşümü $x^2+y^2 \le 1$ dairesidir.

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{k}$

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iint_{S_1} \frac{z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,ds = \iint_{B_1} \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi} -\frac{1}{2}(1-r^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds = \iint_{S_2} \frac{-z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,ds = \iint_S \frac{-\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\,ds = \iint_B \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{2\pi}{3}$$

olacağından $\iint \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ bulunur.

(b) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\qquad \mathbf{F}.\mathbf{n} = \dfrac{-yz_x + xz_y + 1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, $\quad \mathbf{F}.\mathbf{m} = \dfrac{yz_x - xz_y - 1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$.

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iint_B (-yz_x + xz_y + 1)dxdy = \iint_B \left(-y\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1\right)dxdy = \iint_B dxdy = \pi$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds = \iint_B (yz_x - xz_y - 1)dxdy = \iint_B (-1)dxdy = -\pi \quad \text{olacağından} \quad \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds = 0 \text{ dır.}$$

(c) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{F}.\mathbf{n} = -xz_x - yz_y + z$, $\quad \mathbf{F}.\mathbf{m} = xz_x + yz_y - z$

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iint_B \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2}\right)dx\,dy = \iint_B \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2}\,\Big|_0^1\,d\varphi = 2\pi$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds = \iint_B \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy = 2\pi \quad \text{olacağından} \quad \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds = 4\pi \text{ dir.}$$

(d) $$\iint_{S_1} \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iint_S \left(-xzz_x - yzz_y + z^2\right) = \iint_B \left(-xz.\frac{-x}{z} - yz.\frac{-y}{z} + z^2\right)dxdy = \iint_B \left(x^2+y^2+1-x^2-y^2\right)dxdy = \iint_B dxdy = \pi$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}.\mathbf{m}\,ds = \iint_{S_2} \left(xz.z_x + yz.z_y - z^2\right)dxdy = \iint_B \left[xz.\frac{-x}{z} + yz.\frac{-y}{z} - (1-x^2-y^2)\right]dxdy = \iint_B [(-1)]dxdy = -\pi$$

olacağından $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\ ds = \pi - \pi = 0$ dir.

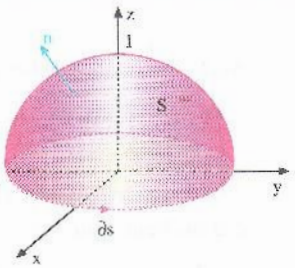
YÜZEY İNTEGRALLERİNİN TEMEL TEOREMLERİ

TEOREM **(Stokes Teoremi)**

S, normali $\boldsymbol{n}$ birim vektörü olan ve sonlu alana sahip bir yönlendirilmiş yüzey, bu yüzeyin ∂S sınır eğrisi kapalı, parçalı düzgün bir eğri ve bunun yönü de S den indirgenen yön olsun. $\boldsymbol{F}$ de S üzerinde sürekli bir vektör alanı ve $\boldsymbol{F}$ nin bileşen fonksiyonları, S nin sınır noktası olmayan tüm noktalarında sürekli kısmi türevlere sahip ise

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_{S} \mathbf{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\ ds$$

olur.

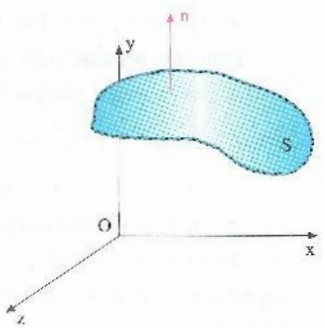


TEOREM **(Divergens Teoremi – Gauss Teoremi)**

D bir basit uzay bölgesi, S bu bölgenin sınır yüzeyi ve $\boldsymbol{n}$ de bu yüzeyin dışa doğru yönlendirilmiş normali olsun. $\boldsymbol{F}$, bileşen fonksiyonları D üzerinde sürekli kısmi türevlere sahip bir vektör alanı ise

$$\iint_{S} \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iiint_{D} \mathrm{div}\mathbf{F}\,dxdydz$$

olur.



www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..

byns

PROBLEMLER

• Yüzey İntegrallerinin Temel Teoremleri

1. Aşağıdaki vektör alanları ile S yüzeyleri için

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}).\mathbf{n}\, ds$$

eşitliğinin gerçeklendiğini, yani Stokes teoreminin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $F = y^2\, i + xy\, j - 2xz\, k$

$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin üst yarısı.

n kürenin dışına doğru yönlendirilmiştir.

(b) $F = y\, i - x\, j$

$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinin üst yarısı.

n kürenin dışına doğru yönlendirilmiştir.

(c) $F = (x^2 - y)\, i + 4z\, j + x^2\, k$

$S = z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi.

n koninin dışına doğru yönlendirilmiştir.

(d) $F = (x^2 + z)\, i + (y^2 + x)\, j + (z^2 + y)\, k$,

$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinin $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin üstünde kalan parçası

n yukarı doğru yönlendirilmiştir.

(e) $F = x^2\, i + y^2\, j + z^2 \tan(xy)\, k$,

$S : z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ yarı elipsoidi.

n elipsoidin dışına doğru yönlendirilmiştir.

2. D, bir basit uzay bölgesi, C, D de bir parçalı düzgün kapalı eğri ve $\mathbf{F}$ de bir fonksiyonun gradiyenti olsun. Bu takdirde

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$$

olacağını gösteriniz.

3. S, $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ elipsoidinin üst yarısı olup n birim normal vektörü yukarı doğru yönlendirilmiştir.

$$F = y\, i + x^2\, j + (x^2 + y^4)^{3/2} \sin e^{\sqrt{xyz}}\, k$$

vektör alanı için

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}).\mathbf{n}\, ds$$

integralini hesaplayınız.

4. S yüzeyi, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ yarı küresi olup n normali yukarı doğru yönlendirilmiştir.

$$\iint_S (\nabla \times (x\, i)).\mathbf{n}\, ds$$

integralini hesaplayınız.

5. Stokes teoreminden yararlanarak herhangi bir kapalı C eğrisi için

$$\oint_C yz\, dz + xz\, dy + xy\, dz = 0$$

olacağını gösteriniz.

6. C eğrisi, köşeleri $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ olan üçgen olduğuna göre

$$\oint_C (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$$

integralini hesaplayınız.

7. Divergens teoreminden yararlanarak, aşağıda verilen F vektör alanları ile S yüzeyleri için $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds$ integrallerini hesaplayınız.

(a) $F = x\, i + y\, j + z\, k$,

S, $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin $z = 0$ ve $z = 1$ düzlemleri arasında kalan bölgenin sınır yüzeyi

(b) $F = y\,(x^2 + y^2)^{3/2}\, i - x\,(x^2 + y^2)^{3/2}\, j + (z + 1)\, k$,

S, üstten $z = 2x$ düzlemi, alttan $z = x^2 + y^2$ paraboloidi tarafından sınırlanan bölgenin sınır yüzeyi

8. $F = x^2 y^2 z\, i - x^4 yz^2\, j$ ve

$D = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \}$ olduğuna göre

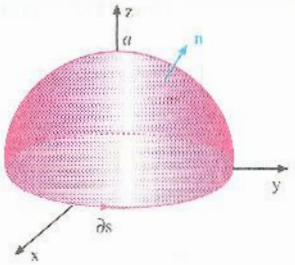
$$\iiint_D (\text{div}\mathbf{F})dxdydz$$

integralini divergens teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

9. $F = x^3\, i + y^3\, j + z^3\, k$ ve S de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi olsun.

$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds$ integralini divergens teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER



1. **(a)** $\mathbf{F} = y^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} - 2xz\,\mathbf{k}$, S: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ yarı küresi, $\mathbf{n}$ yukarı doğru.

∂S eğrisi, yarıçapı a olan çember olduğundan parametrik denklemi $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ olur. Buradan $\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$ bulunur. Buna göre

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\partial S}(\mathbf{F}.\mathbf{r}')dt = \int_0^{2\pi}\left[a^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos t\sin t(a\cos t)\right]dt = a^3\int_0^{2\pi}\left(-\sin^3 t + \cos^2 t\sin t\right)dt$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left[-(1-\cos^2 t)\sin t + \cos^2 t\sin t\right]dt = a^3\int_0^{2\pi}\left(-\sin t + 2\cos^2 t\sin t\right)dt = a^3\left(\cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & -2xz \end{vmatrix} = (0-0)\mathbf{i} + (2z+0)\mathbf{j} + (y-2y)\mathbf{k} = 2z\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dy \text{ olacağından}$$

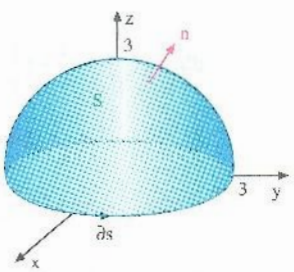
$$\int_S(\nabla\times\mathbf{F}).\mathbf{n}\,ds = \iint_B\left(-2z f_y - y\right)dxdy = \iint_B\left(-2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,.\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} - y\right)dxdy = -3\iint_B y\,dx\,dy$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^a r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi = -3\int_0^{2\pi}\sin\varphi\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}d\varphi = -a^3\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = -a^3.0 = 0$$

bulunur. O halde

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_B \mathbf{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds$$

olur ki bu da Stokes Teoreminin gerçeklendiğini gösterir.



(b) $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $\mathbf{n} = \dfrac{-z_x\,\mathbf{i} - z_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = 0.\mathbf{i} - 0.\mathbf{j} + (-1-1)\mathbf{k} = -2\,\mathbf{k}$$

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}(3\sin t\,\mathbf{i} - 3\cos t\,\mathbf{j}).(-3\sin t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j})\,dt = \int_0^{2\pi}(-9\sin^2 t - 9\cos^2 t)\,dt = -9\int_0^{2\pi}dt = -18\pi$$

$$\iint_B \mathbf{cur}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iint_B(-2\mathbf{k}).\frac{-z_x\,\mathbf{i} - z_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.ds = \iint_B(-2\mathbf{k}).\mathbf{k}\,dxdy = -2\iint_B dxdy = -2.\pi.9 = -18\pi$$

bulunur. Şu halde $\int_{\partial S}\mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_B \mathbf{curl}\,\mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds$ dir.

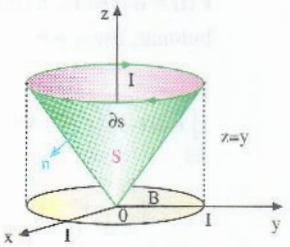
(c) $\mathbf{F}=(x^2-y)\mathbf{i}+4z\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$,

$z=1$ düzlemi ile $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin arakesit eğrisi $x^2+y^2=1,\ z=1$ çemberidir. Bunun bir parametrik gösterimi $\mathbf{r}(t)=\cos(-t)\mathbf{i}+\sin(-t)\mathbf{j}+\mathbf{k}=\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}+\mathbf{k},\ 0\le t\le 2\pi$ olur. $\mathbf{r}'(t)=-\sin t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}$ olacağından

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\left[\left(\cos^2 t+\sin t\right)\mathbf{i}+4\,\mathbf{j}+\cos^2 t\,\mathbf{k}\right].\left[-\sin t\mathbf{i}-\cos t\,\mathbf{j}\right]dt=\int_0^{2\pi}\left[\cos^2 t(-\sin t)-\sin^2 t-4\cos t\right]dt$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t-4\sin t\Big|_0^{2\pi}=-\pi$$

olur.



$\iint_S \mathbf{CurlF}.\mathbf{n}\,dS$ integralini hesaplayalım.

$\mathbf{CurlF}=-4\,\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ve $\mathbf{n}=\dfrac{z_x\mathbf{i}+z_y\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$ olacağından

$$\iint_S \mathbf{curlF}.\mathbf{n}\,ds=\iint_B(-4\,\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+\mathbf{k}).\frac{z_x\mathbf{i}+z_y\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_B\left(-4z_x-2xz_y-1\right)dxdy$$

$$=\iint_B\left(-4\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-2x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{-4r\cos\varphi}{r}-\frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r}-1\right)r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}-4\frac{r^2}{2}\cos\varphi-\frac{2}{3}r^3\cos\varphi\sin\varphi-\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(-2\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos\varphi\sin\varphi-\frac{1}{2}\right)d\varphi=-\pi$$

bulunur.

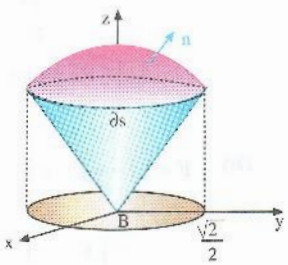
(d) $\mathbf{F}=(x^2+z)\,\mathbf{i}+(y^2+x)\,\mathbf{j}+(z^2+y)\,\mathbf{k}$

S: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $\quad \mathbf{n}=\dfrac{-zx\,i-zy\,j+k}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

B: $x^2+y^2\le\dfrac{1}{2}$ dairesi

$r(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,i+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,j,\quad 0\le t\le 2\pi$



∂S, koni ile kürenin arakesit eğrisi bir çember olup bir parametrik denklemi

$$r(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,i+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,j+\frac{1}{\sqrt{2}}k,\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$F\left(x(t),y(t),z(t)\right)=\left(\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i+\left(\frac{1}{2}\sin^2 t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)j+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)k$$

ve $r'(t)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,i+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,j$ olacağından

$$\int_{\partial S} F.dr = \int_0^{2\pi}\left(F.\frac{dr}{dt}\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\cos^2 t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin^2 t\cos t + \frac{1}{2}\cos^2 t\right)dt = \frac{\pi}{2}$$ olur.

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2+z & y^2+x & z^2+y \end{vmatrix} = i+j+k$$

$$n = \frac{-f_x i - f_y j + k}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}i + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}j + k}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}} = xi + yj + \sqrt{1-x^2-y^2}\,k$$

olduğundan $rotF.n = x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}$ olur. Bu durumda

$$\iint_S rotF.n\,ds = \iint_B \left(x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = \iint_B\left(\frac{x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1\right)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(\frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{1-r^2}}+1\right)dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi dr + \int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

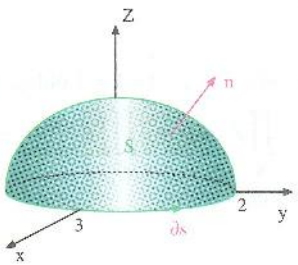
olur. O halde Stokes Teoremi gerçekleşir.

(e) Yukarıda yapılanlara benzer biçimde gösterilir.

2. $F = gradf$ olsun. Stokes teoreminden

$$\oint_C F.dr = \oint_C gradf.dr = \iint_S curl(gradf).n\,ds = \iint_S 0.n\,ds = 0$$

bulunur.



3. $F = y\,i + x^2\,j + (x^2+y^4)^{3/2}\sin e^{\sqrt{xyz}}\,k$

$r(t) = 3\cos t\,i + 2\sin t\,j, \quad 0 \le t \le 2\pi$

$r'(t) = -3\sin t\,i + 2\cos t\,j$

$$\iint_S (\nabla\times F).n\,ds = \int_{\partial S} F.dr = \int_{\partial S}(F.r')dt = \int_0^{2\pi}\left[2\sin t\,i + 9\cos^2 t\,j + \left(9\cos^2 t + 16\sin^4 t\right)^{3/2}\sin t\,k\right]\left[3\sin t\,i + 2\cos t\,j\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(-6\sin^2 t + 18\cos^3 t)dt = \int_0^{2\pi}\left[-3(1-\cos 2t) + 18(1-\sin^2 t)\cos t\right]dt$$

$$= -3\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + 18\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -6\pi$$

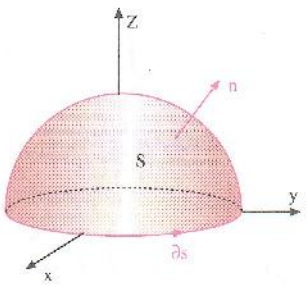
4. $F = x\,i$

$r(t) = \cos t\,i + \sin t\,j, \quad 0 \le t \le 2\pi$

$r'(t) = -\sin t\,i + \cos t\,j$

$$\iint_S \nabla\times(x\,i).n\,ds = \int_{\partial S} F.dr = \int_0^{2\pi}\cos t\,i.(-\sin t\,i + \cos t\,j)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos t(-\sin t)dt = \frac{1}{2}\cos^2 t\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$



5. $\oint_C yzdx + xzdy + xydz$ ifadesi $f(x,y,z) = xyz$ fonksiyonunun gradiyentinin eğrisel integralidir.

$$\oint_c yzdr + xzdy + xydz = \oint_c gradf.dr = \iint_S curl(gradf).n\ dS$$

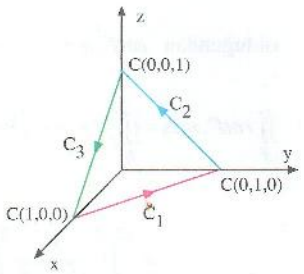
$$= \iint_S 0.n\ ds = \iint_S 0.dS = 0$$

olur.

6. $C_1 \ldots\ x = y,\ z = 0$

$C_2 \ldots\ y = z,\ x = 0$

$C_3 \ldots\ x = z,\ y = 0$

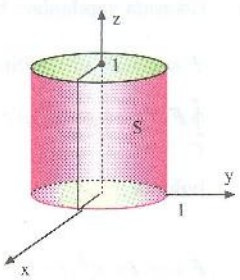


$$\oint_{C_1} (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = \int_0^1 (-x+x)dx = 0$$

olur. Benzer biçimde $\int_{C_2} = \int_{C_3} = 0$ olduğu gösterilebilir. O halde

$$\oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0+0+0 = 0 \quad olur.$$

7. (a) $div\ F = 1+1+1 = 3$ olduğundan



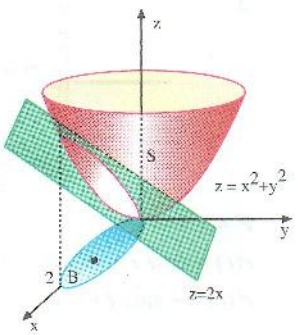
$$\iint_S F.n\,ds = 3\iiint_G dxdydz = 3.(\text{G nin hacmi}) = 3.\pi.1.1 = 3\pi$$

olur.

(b) $div F = \frac{3}{2}.y\,(x^2+y^2)^{1/2}2x - \frac{3}{2}x\,(x^2+y^2)^{1/2}2x + 1 = 1$

$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

$r^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r = 2\cos\varphi$



$$\iint_S F.n\,ds = \iiint_D div F\ dxdydz = \iint_B \left(\int_{x^2+y^2}^{2x} dz \right) dxdy$$

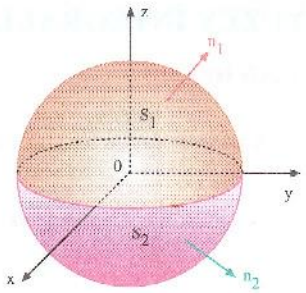
$$= \iint_B [2x - (x^2+y^2)]dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2\cos\varphi} (2r\cos\varphi - r^2)r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{2}{3}r^3\cos\varphi - \frac{1}{4}r^4 \right)\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4}{3}\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{3}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

8. $\iiint_D div\mathbf{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \mathbf{F}.n\,ds = \iint_{S_1} \mathbf{F}.n\,ds + \iint_{S_2} \mathbf{F}.n_2\,ds$



olur. S_1 yüzeyinin denklemi $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ olacağından bunun dışarı doğru yönlendirilen normali

$$n_1 = \frac{-z_x\mathbf{i} - z_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

olacağından

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}.\mathbf{n}_1\,ds = \iint_{S_1} (x^4y^2z - x^4y^2z)\,ds = \iint_{S_1} 0\,ds = 0$$

olur.

S_2 yüzeyinin denklemi $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ olacağından bunun normali

$$n_2 = \frac{z_x\mathbf{i} + z_y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} = -(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$$

olur. Bu durumda

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}.n_2\,ds = \iint_{S_2} -(x^4y^2z - x^4y^2z)\,ds = \iint_{S_2} 0\,ds = 0$$

bulunur. Buna göre

$$\iiint_D div\mathbf{F}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$$

olur.

9. $divF = 3x^2+3y^2+3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$ olacağından

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \iiint_D divF(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 3\iiint_D divF(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

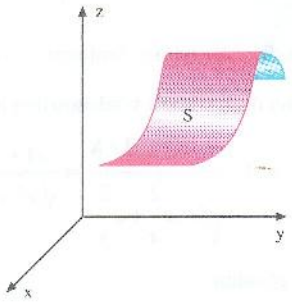
$$= \frac{3}{4}a^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2\rho|\sin\theta|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \frac{3}{4}a^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{3}{4}a^4 \int_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} d\varphi = \frac{3}{2}a^4 \int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi a^4$$

bulunur.

YÜZEY İNTEGRALLERİNİN UYGULAMALARI

ALAN HESABI



S parçalı düzgün bir yüzey parçası ise bu yüzeyin alanı

$$A = \iint_S ds$$

olur.

KÜTLE HESABI

S yüzeyinin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu σ (x, y, z) ise

$$M = \iint_S \sigma(x,y,z)\,ds$$

olur.

AĞIRLIK MERKEZİNİN BULUNMASI

$$\bar{x} = \frac{I}{M}\iint_S x\,\sigma(x,y,z)\,ds, \quad \bar{y} = \frac{I}{M}\iint_S y\,\sigma(x,y,z)\,ds, \quad \bar{z} = \frac{I}{M}\int z\,\sigma(x,y,z)\,ds$$

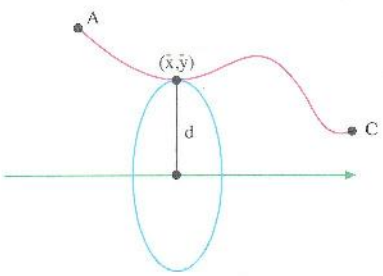
EYLEMSİZLİK MOMENTİ HESABI

$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\,\sigma(x,y,z)\,ds \qquad I_y = \iint_S (x^2+z^2)\,\sigma(x,y,z)\,ds$$

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\,\sigma(x,y,z)\,ds \qquad I_d = \iint_S d^2\,\sigma(x,y,z)\,ds$$

TEOREM (İkinci Pappus Teoremi)

Bir düzlem eğrisinin, kendisiyle aynı düzlemde bulunan ve eğriyi kesmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı, eğrinin uzunluğu ile ağırlık merkezinin çizdiği çemberin uzunluğunun çarpımına eşittir.



www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımızla..

byns

PROBLEMLER

• Yüzey İntegrallerinin Uygulamaları

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $x^2 + y^2 - 2y = 0$ silindiri içinde kalan parçalarının alanları toplamını bulunuz.

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $x^2 + y^2 = a^2$ silindiri içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.

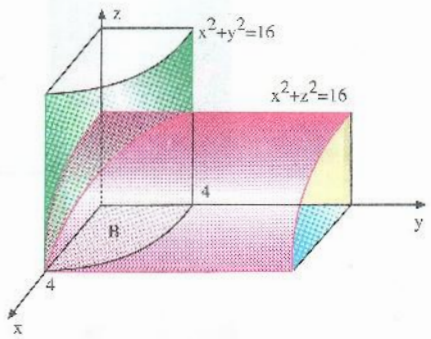
3. $x^2 + y^2 = 6z$ paraboloidinin $x^2 + y^2 = 27$ silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

4. $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ küresi içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.

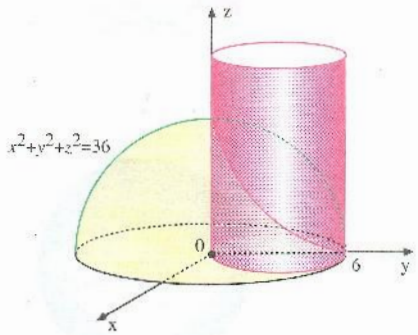
5. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ küresinin $z^2 = x^2 + y^2$ konisi içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

6. $y^2 = x^2 + z^2$ konisinin $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ küresi içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

7. $x^2 + z^2 = 16$ silindirinin $x^2 + y^2 = 16$ silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.



8. $x^2 + y^2 = 6y$ silindirinin $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ küresi içinde kalan parçasının alanını bulunuz.



9. $x + y + z = 6$ düzleminin $x^2 + y^2 = 6$ silindiri içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ küresinin $z = x^2 + y^2$ paraboloidi içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.

11. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ küresinin $z = 2$ ve $z = 4$ düzlemleri arasında kalan parçasının alanını hesaplayınız.

12. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ küresinin $2x^2 + y^2 = 25$ eliptik silindiri içinde kalan parçalarının alanları toplamını hesaplayınız.

13. S yüzeyi, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinin $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi içinde kalan parçası olduğuna göre bu yüzey üzerine yerleştirilen homogen bir ince tabakanın kütlesini ve ağırlık merkezini bulunuz.

14. Yarıçapı 4 birim olan yarıküre biçimindeki ince bir tabakanın (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z) = z^2$ şeklinde değişiyor. Bu levhanın kütlesini ve ağırlık merkezini bulunuz.

15. $x^2 + y^2 = 3z^2$ konisinin xOy düzleminin üstünde ve $x^2 + y^2 = 4y$ silindirinin içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.

16. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ küresinin, $z = 16 - x^2 - y^2$ paraboloidi dışında kalan parçasının alanını hesaplayınız.

17. $x^2 + z^2 = 1$ silindirin $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi içinde kalan parçanın her (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2}$ dir. Bu parçanın orijine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

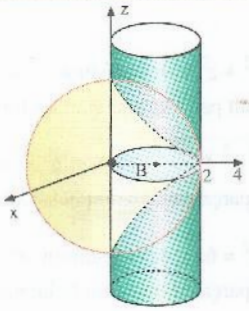
$$A=\iint_S dS=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=2\iint_B\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

olur. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ dönüşümü yapılırsa

$$A=2\int_0^{\pi}\int_0^{2\cos\varphi}\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4-r^2}}=4\int_0^{\pi/2}(4-r^2)^{-1/2}=-4\int_0^{\pi/2}(4-r^2)^{1/2}\Big|_0^{2\cos\varphi}$$

$$=-4\int_0^{2\cos\varphi}(4-4\cos^2\varphi)^{1/2}-2]d\varphi=-8\int_0^{\pi/2}(\sin\varphi-2)d\varphi$$

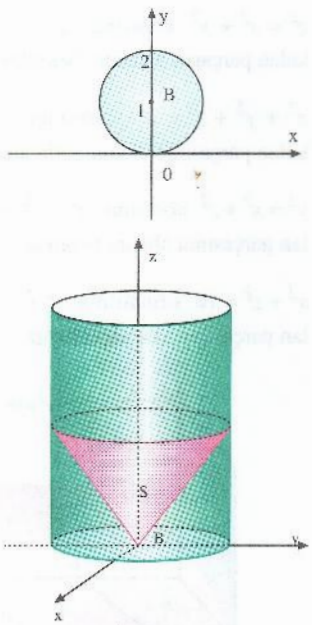
$$=-8(1-\pi)=8(\pi-1)$$



2. $A=\iint_S ds=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

$$=\iint_B\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=\sqrt{2}\iint_B dxdy$$

$$=\sqrt{2}.(A\,lanB)=\sqrt{2}\pi a^2$$



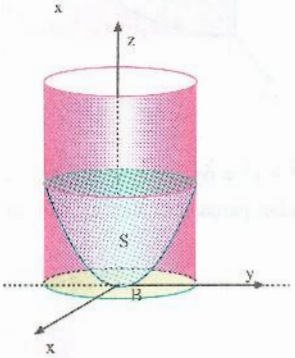
3. $6z=x^2+y^2$, $z_x=\dfrac{x}{3}$, $z_y=\dfrac{y}{3}$

$$A=\iint_S ds=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint_B\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=\frac{1}{3}\iint_B\sqrt{9+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{27}}(9+r^2)^{1/2}rdrd\varphi=\frac{1}{9}\int_0^{2\pi}(9+r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{27}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{9}(6^3-3^3).2\pi=42\pi.$$

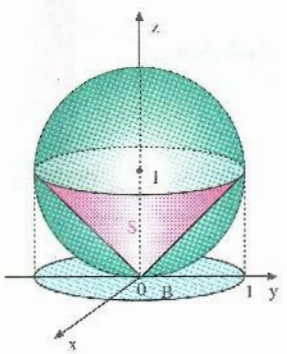


4. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$ds=\sqrt{2}dxdy$ olacağından

$$A=\iint_S ds=\iint_B\sqrt{2}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{2}rdrd\varphi$$

$$=\sqrt{2}\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 2\pi=\sqrt{2}\pi\quad\text{birimkare olur.}$$

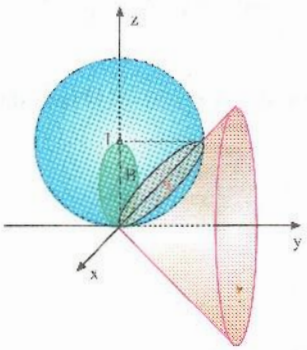


5. Problem 4'teki şekilden de görüldüğü gibi sözkonusu yüzey yarım küre yüzeyidir. Kürenin yüzey alanı $4\pi r^2 = 4\pi$ olacağından istenen alan

$$A = \frac{1}{2}.4\pi = 2\pi \ br^2$$

olur

6. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 2z \\ y^2 &= x^2+z^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+z^2 = z$



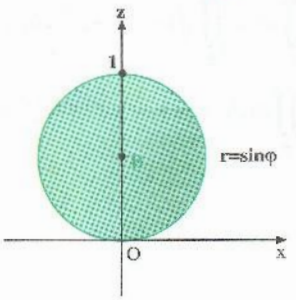
$x = r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi$ yazılırsa

$r^2 = r\sin\varphi \Rightarrow r = \sin\varphi$ bulunur.

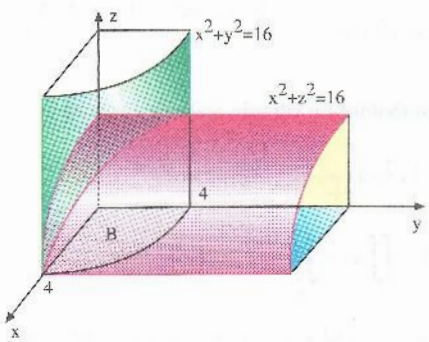
$$A = \iint_S ds = \iint_B \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz$$

$$= \iint_B \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}}\,dxdy$$

$$= \iint_B \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\sin\varphi} r\,dr\,d\varphi = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$$



7. Yandaki şekilde alanı istenilen yüzeyin sekizde biri çizilmiştir.



$$\frac{A}{8} = \iint_S ds = \iint_B \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$z = \sqrt{16-x^2}, \quad z_x = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}, \quad z_y = 0$$

$$\frac{A}{8} = \iint_B \sqrt{1+\frac{x^2}{16-x^2}}\,dxdy$$

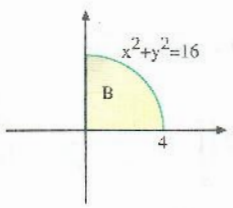
$$= 4\iint_B \frac{dxdy}{\sqrt{16-x^2}} = 4\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$= 4\int_0^4 y\Big|_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = 4\int_0^4 dx = 4x\Big|_0^4 = 16$$

olacağından

$$A = 8.16 = 144 \text{ br}^2$$

bulunur.



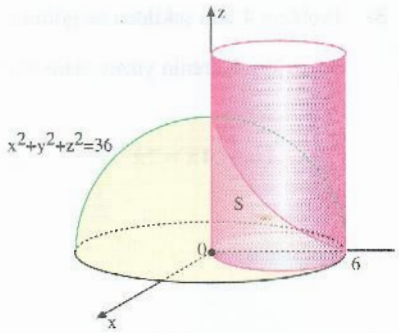
8. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=36\\ x^2+y^2&=6y\end{aligned}\right\} \Rightarrow 6y=36-z^2$

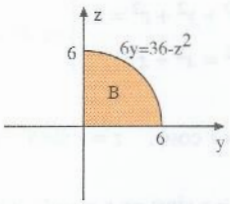
$$\frac{A}{4}=\iint_S ds=\iint_B \sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz$$

$$=\int_0^6\int_0^{\sqrt{36-6y}}\frac{dzdy}{\sqrt{6y-y^2}}=3\int_0^6\frac{\sqrt{36-6y}}{\sqrt{6y-y^2}}dy$$

$$=3\int_0^6\sqrt{\frac{6}{y}}dy=3\sqrt{6}.2\sqrt{y}\,\Big|_0^6=36$$

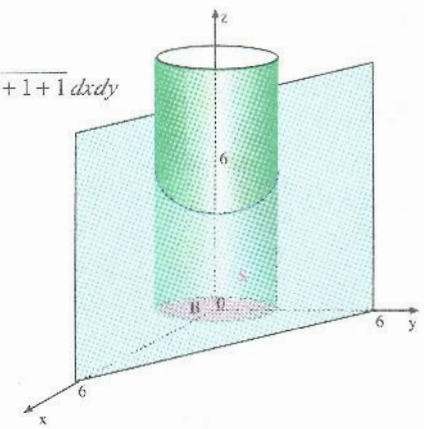
olur. O halde $A=4.36=144$ br^2 dir.

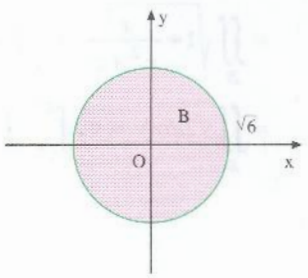




9. $A=\iint_S ds=\iint_B \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_B \sqrt{1+1+1}\,dxdy$

$$=\sqrt{3}\iint_B dxdy=\sqrt{3}.\frac{1}{4}\pi.6=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$$





10. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=4z\\ z&=x^2+y^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow z+z^2=4z \Rightarrow z=0 \;\; V \;\; z=3$

Paraboloid ile kürenin arakesit eğrisi

$x^2+y^2=3$, $z=3$ çemberdir.

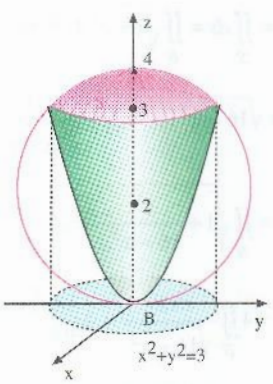
$$A=\iint_S ds=\iint_B \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$x^2+y^2+z^2=4z \Rightarrow x^2+y^2+(z-2)^2=4 \Rightarrow$$

$$z=2+\sqrt{4-x^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

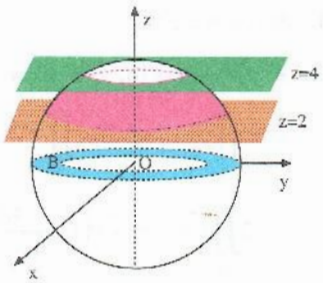
$$A=2\iint_B\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}(4-r^2)^{-1/2}\,rdrd\varphi=-2\int_0^{2\pi}(4-r^2)^{1/2}\Big|_0^{\sqrt{3}}d\varphi$$

$$=-2.(1.2)2\pi=4\pi$$



11. $z=2$ *için* $x^2+y^2+4z \Rightarrow z=0 \;\; V \;\; z=3$

$z=4$ *için* $x^2+y^2+16=25 \;\Rightarrow\; x^2+y^2=9$

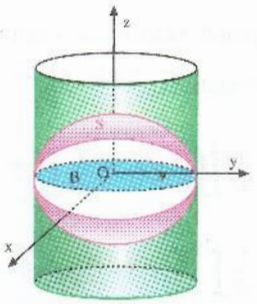


$$z=\sqrt{25-x^2-y^2}, \quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, \quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$$

$$A=\iint_S ds=\iint_H \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{25-x^2-y^2}}\,dxdy=5\iint_B \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$$

$$=5\int_0^{2\pi}\int_3^{\sqrt{21}}(25-r^2)^{-1/2}\,rdrd\varphi=-5\int_0^{2\pi}(25-r^2)^{1/2}\Big|_3^{\sqrt{21}}d\varphi=20\pi \;\; br^2$$

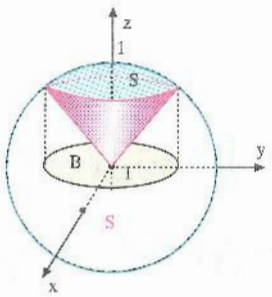
12. $$A=2\iint_B \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\;dxdy=2\iint_B \frac{5dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$$



$$=10\int_0^{2\pi}\int_0^5 \frac{r}{\sqrt{2}}\cdot\frac{drd\varphi}{\sqrt{25-r^2}}=\frac{40}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}(25-r^2)^{1/2}\Big|_0^5 d\varphi$$

$$=\frac{200}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{200}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=50\sqrt{2}\pi \;\; br^2$$

13. $$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=1\\ z^2&=x^2+y^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{2}$$



$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$1+z_x^2+z_y^2=1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}=\frac{1}{1-x^2-y^2}$$

$\sigma(x,y,z)=k(sabit)$

$$M=\iint_S \sigma ds=k\iint_B \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=k\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-r^2)^{-1/2}\,rdrd\varphi$$

$$=-k\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{1/2}\Big|_0^{\sqrt{2}/2}d\varphi=-k(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)2\pi=(2-\sqrt{2})k\pi$$

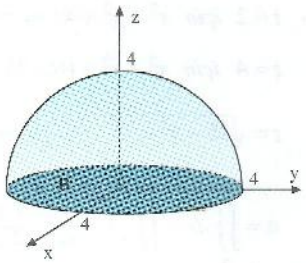
Levha homojen ve z eksenine göre simetrik olduğundan $\bar{x}=\bar{y}=0$ dır.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint_S z\sigma ds=\frac{1}{M}\iint_B k\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{k}{(2-\sqrt{2})k\pi}\iint_B dxdy$$

$$=\frac{1}{(2-\sqrt{2})\pi}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2(2-\sqrt{2})}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

olur. Şu halde ağırlık merkezi $G(0,0,\frac{2+\sqrt{2}}{4})$ noktasıdır.

14. $\sigma(x,y,z)=z^2$



$x^2+y^2+z^2=16, \quad z=0 \Rightarrow x^2+y^2=16$

$$M=\iint_S \sigma(x,y,z)dS=\iint_S z^2\,ds$$

$$=2\iint_B (16-x^2-y^2).\frac{4\,dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}=4\iint_B \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=4\int_0^{2\pi}\int_0^4 \sqrt{16-r^2}\,r\,dr\,d\varphi=-4\int_0^{2\pi}(16-r^2)^{3/2}\Big|_0^4\,2\pi$$

$$=\frac{4}{3}.64.2\pi=\frac{512}{3}\pi$$

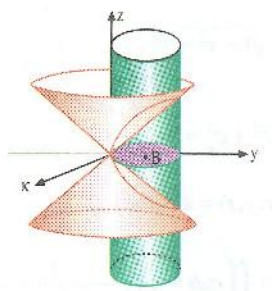
Yoğunluk sadece z'ye bağlı ve yüzey z eksenine göre simetrik olduğundan $\bar{x}$, $\bar{y}=0$ dır.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint_S z^2.z\,ds=\frac{1}{M}\iint_B z^3.\frac{dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}=\frac{1}{M}\iint_B (16-x^2-y^2)\,dxdy$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^4 (16-r^2)\,r\,dr\,d\varphi=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}(8r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^4 d\varphi=\frac{3}{512\pi}64.2\pi=\frac{3}{4}$$

bulunur. Şu halde ağırlık merkezi $G(0,0,\frac{3}{4})$ noktasıdır.

15. $A=\iint_S ds=2\int_B\int \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

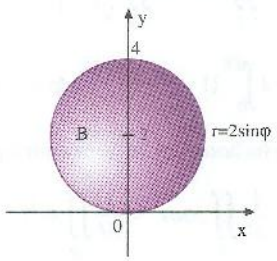


$$z=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{r^2+y^2}, \quad z_x=\frac{x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_y=\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}$$

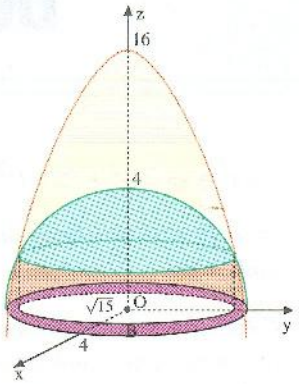
$$A=2\iint_B \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{3(x^2+y^2)}}\,dxdy=2.\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_B dxdy$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi}=\frac{16}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{16}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$=\frac{16}{\sqrt{3}}(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi}=\frac{8\pi}{\sqrt{3}} \quad br^2$$



16. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=16 \\ z=16-x^2-y^2 \end{matrix}\right\} z^2-z=0 \Rightarrow z=0 \vee z=1$



$z=0$ için $x^2+y^2=16$, $z=1$ için $x^2+y^2=15$

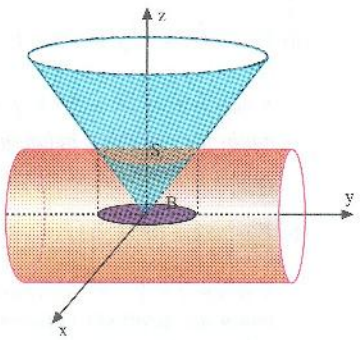
bulunur. B bölgesi $x^2+y^2=15$ ve $x^2+y^2=16$ çemberleri arasında kalan bölgedir.

$$A=\iint_B \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint_B \frac{4\,dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$$

$$=4\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{15}}^{4}\frac{dr d\varphi}{\sqrt{16-r^2}}=4.4\int_0^{\pi/2}(-16-r^2)^{1/2}\Big|_{\sqrt{15}}^{4}d\varphi$$

$$=16.1.2\pi=32\pi \ br^2 \ olur.$$

17. $\left.\begin{matrix} x^2+z^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x^2+y^2=14$

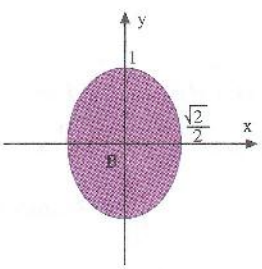


B bölgesi $2x^2+y^2=1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgedir.

$$I_o=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\sigma(x,y,z)ds=\iint_S (x^2+y^2+1-x^2).\sqrt{1+x^2}\,dS$$

$$=\iint_S (y^2+1)\sqrt{1-x^2}\,ds=\iint_B (y^2+1)dxdy$$

$$=\iint_B (y^2+1)\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dxdy=\iint_B (y^2+1)dxdy$$



olur. $x=\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ dönüşümü yapılırsa $J=\frac{r}{\sqrt{2}}$ olacağından

$$I_o=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\sin^2\varphi+1)\frac{r}{\sqrt{2}}dr d\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(\frac{r^4}{4}\sin^2\varphi+\frac{r^2}{2})\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}\sin^2\varphi+\frac{1}{2})d\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8}(1+\cos 2\varphi)+\frac{1}{2}\right]d\varphi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{5}{8}.2\pi=\frac{5\sqrt{2}}{8}\pi$$

byns

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $F=(x^2+z)i-(y^2+x)j+(z^2+y)k$ ve C de $x^2+y^2+z^2=1$ küresi ile $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin arakesitidir.

   C nin yönü, üstten bakıldığında, saat yönünün ters yönü olduğuna göre, Stokes teoreminden yararlanarak $\int_C F.dr$ integralini hesaplayınız.

2. Stokes teoreminden yararlanarak, aşağıda verilen F vektör alanları ile S yüzeyleri için

   $\iint_S (\nabla \times F).n\,ds$ integrallerini hesaplayınız.

   (a) $F = xz^2\,i + x^3\,j + \cos xz\,k$,

   S yüzeyi $x^2+y^2+3z^2=1$ elipsoidinin x O y düzleminin üst tarafında bulunan parçası olup n normali yukarı doğru yönlendirilmiştir.

   (b) $F = xz\,i + (y^2+2z)\,j + x\,k$,

   S yüzeyi $z=9-x^2-y^2$ paraboloidinin x O y düzleminin üst tarafında bulunan parçası olup n normali yukarı doğru yönlendirilmiştir.

3. $F(x, y, z) = x^3y^2z\,i - x^4yz\,j$ ve

   $D=\{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

   $$\iiint_D div F\,dxdydz$$

   integralini Divergens teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

4. S yüzeyinin denklemi $g(x, y, z) = 0$ biçiminde verildiğinde

   $$n=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{\left(g_x, g_y, g_z\right)}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}}$$

   $$=\left(\frac{g_x}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}}, \frac{g_y}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}}, \frac{g_z}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}}\right)$$

   $=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$

   olsun. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ dir.
   $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sayılarına n nin doğrultman kosinüsleri adı verilir.

   $F=Pi+Qj+Rk$ için

   $$\iint_S F.n\,ds=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

   olacağını gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

   (a) $\iint_S (.r\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds$;

   Burada S yzeyi $x+y+z=2$ düzleminin birinci bölgedeki parçasıdır.

   (b) $\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds$;

   Burada S, $x^2+y^2+4z=4$ paraboloidinin ikinci bölgedeki $(x<0,\ y>0,\ z>0)$ parçasıdır.

   (c) $\iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds$;

   Burada S üzeyi, $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresidir.

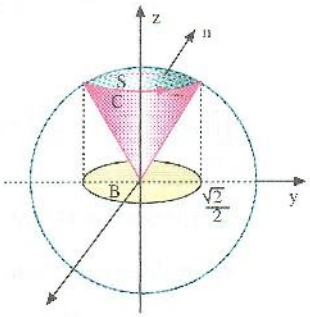
5. $K=\{(x, y, z) : 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$ küpünün yüzeyi ince bir metalle kaplanıyor. Her bir (x, y, z) noktasındaki yoğunluk $\sigma(x, y, z) = xyz$ olduğuna göre metalin kütlesini bulunuz.

6. $az=x^2+y^2$, $0\le z\le a$ paraboloid parçası biçimindeki homogen ince metal bir tabakanın ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

7. $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresinin, $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ küresi içinde kalan parçasının alanını hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. $\int_C F.dr = \iint_S curlF.n\,ds$



$$n = \frac{-z_x i - z_y j + k}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\quad ds = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$curlF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+z & y^2+x & z^2+y \end{vmatrix} = i+j+k$$

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2},\quad z_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

olacağından

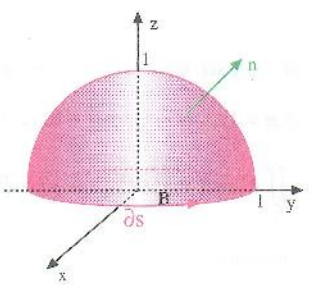
$$\int_C F.dr = \iint_S curlF.n\,ds = \iint_B (i+j+k).\left(\frac{-x\,i}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{y\,j}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + k\right)dxdy$$

$$= \iint_B \left(\frac{-x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1\right)dxdy = -\iint_B \frac{x+y}{\sqrt{1+x^2-y^2}}\,dxdy + \iint_B dxdy$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\,rdrd\varphi + \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\right](\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi + \frac{\pi^2}{2} = 0\,\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

2. (a) $\iint_S (\nabla \times F).n\,ds = \iint_{\partial S} F.d\,r$



∂s : $r(t) = \cos t\,i + \sin t\,j + o\,k,\quad 0 \le t \le 2\pi$

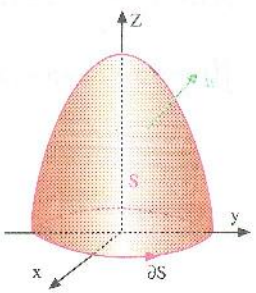
$$\int_{\partial S} F.dr = \int_{\partial S} (.rz^2\,i + .x^3\,j + \cos.rz\,k).dr$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^3 t\,j + k).(-\sin t\,i + \cos t\,j)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+cuos\,2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos 3t + \frac{+\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{3}{2}.2\pi = \frac{3\pi}{4}$$

(b) $\iint_S (\nabla \times F).n\,ds = \int_{\partial S} F.d\,r$



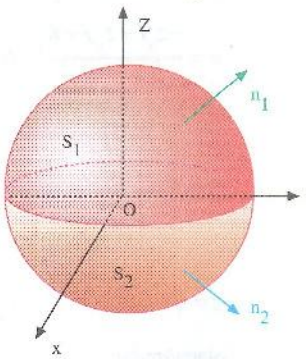
∂S : $x^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad r(t) = 3\cos t\,i + 3\sin t\,j + o.k,\quad 0 \le t \le 2\pi$

$r'(t) = -3\sin t\,i + 3\cos t\,k$

$$\int_{\partial S} F.dr = \int_0^{2\pi} \left[(9\sin^2 t + 6\cos t)\,j + 3\cos t\,k\right].(-3\sin t\,i + 3\cos t\,j)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (27\sin^2 t\cos t + 18\cos^2 t)dt = (9\sin^3 t + 9t + \frac{9}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$

3. $\iiint_D div F\,dxdydz = \iint_S F.nds = \iint_{S_1} F.n_1 ds + \iint_{S_2} F.n_2 ds$



S_1 yüzeyinin denklemi $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ olacağından

bunun dışarı doğru yönlendirilmiş normali

$$n_1 = \frac{-z_x\,i - z_y\,j + k}{\sqrt{1 + z_x^2 + Z_y^2}} = x\,i + y\,j + z\,k$$

olur. Buna göre,

$$\iint_{S_1} F.n_1 ds = \iint_{S_1} (x^3y^2z\,i - x^4yz\,j).(x\,i + y\,j + z\,k)\,ds$$

$$= \iint_{S_1} (x^4y^2z - x^4y^2z)ds = \iint_{S_1} 0\,ds = 0$$

bulunur. Benzer şekilde S_2 nin denkleminin $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ olduğu gözönüne alınarak, $n_2 = -(x\,i + y\,j + z\,k)$ ve

$\iint_{S_2} F.n_2 ds = 0$ bulunur. Ohalde

$\iint_S F.n\,ds = 0$ dır.

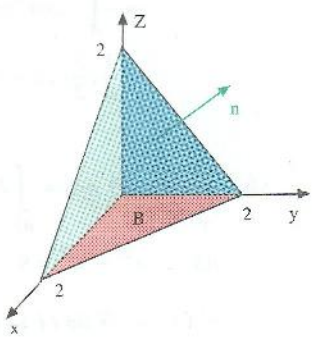
4. $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ve $F = P\,i + Q\,j + R\,k$ ise

$F.n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ olacağından

$$\iint_S F.n\,ds = \iint_S (P\cos\alpha + \cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

bulunur.

(a) $g(x,y,z) = x + y + z - 2$, $\nabla g = (1,1,1)$ $\quad \|\nabla g\| = \sqrt{3}$, $\quad n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

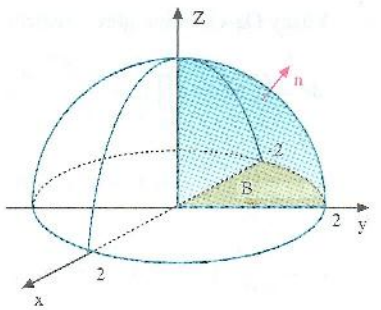


$$\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (x + y + z)ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_B (x + y + 2 - x - y)\sqrt{1+1+1}\,dxdy$$

$$= 2\iint_B dxdy = 2.\frac{1}{2}.2.2 = 4$$

(b) $z = 1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2), \quad z_x = -\frac{x}{2}, \; z_y = -\frac{y}{2}$

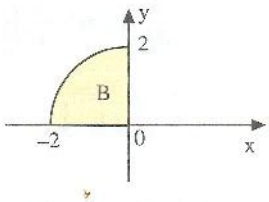


$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}\,dxdy = \frac{1}{2}\sqrt{4 + x^2 + y^2}\,dxdy$$

$$n = \frac{\frac{x}{2}i + \frac{y}{2}j + k}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}} = \frac{xi + yj + 2k}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}}$$

$$= \iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,ds$$

$$= \iint_B \frac{x^2.x + y^2.y + z^2.2}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4 + x^2 + y^2}\,dxdy$$



$$= \frac{1}{2}\iint_B (x^3 + y^3 + 2z^2)\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_B \left[(x + y)(x^2 + y^2 - xy) + 2(1 - \frac{x^2 + y^2}{4})^2 \right] dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^2 \left[(r\cos\varphi + r\sin\varphi)(r^2 - r^2\sin\varphi\cos\varphi) + 2(1 - \frac{r^2}{4})^2 \right] r\,dr\,d\varphi$$

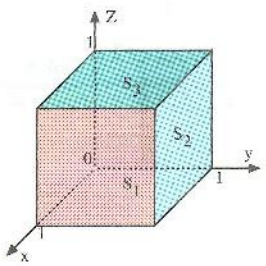
$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^2 r^4\,dr \right) (\cos\varphi + \sin\varphi)(1 bihcob) r\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^2 r(4 - r^2)^2\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{32}{10}\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi)\,d\varphi + \frac{8}{3}\pi$$

$$= \frac{16}{5}(\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi)\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \frac{8}{3}\pi = \frac{8\pi}{3}$$

(c) (a) ve (b) şıklarındaki yolla hesaplanır.

5. $M = \iint_S \sigma(x,y,z)\,ds = \iint_S xyz\,ds$



xoy düzleminde z = 0 ⇒ xyz = 0 olacağından, bu düzlem üzerinde yüzey integrali sıfırdır. xoz düzleminde y = 0 ve yOz düzleminde x = 0 olacağından bu yüzeyler üzerinde de integral sıfırdır. Şimdi denklemi x = 1 olan S_1, y = 1 olan S_2 ve z = 1 olan S_3 yüzeyleri üzerindeki integralleri hesaplayalım:

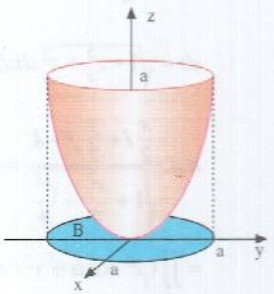
$$\iint_{S_1} xyz\,ds = \iint_{S_1} yz.\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\,dydz = \int_0^1\int_0^1 yz\,dydz = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

olur. Benzer şekilde

$$\iint_{S_2} xyz\,ds = \iint_{S_3} xyz\,ds = \frac{1}{4}$$

olacağı açıktır. O halde $\iint_S xyz\,ds = 3.\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ olur.

6. Yüzey Oz-eksenine göre simetrik ve homogen olduğundan $\bar{x} = \bar{y} = 0$ dır.



$$M = \iint_S k\,ds = k\iint_B \sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}}\;dxdy$$

$$= \frac{k}{a}\iint_B \sqrt{a^2+4(x^2+y^2)}\;dxdy$$

$$= \frac{k}{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(a^2+4r^2)^{1/2}\,rdrd\varphi$$

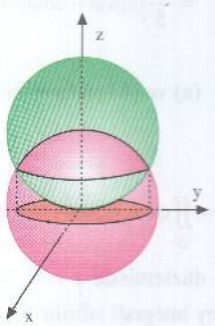
$$= \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{8}(a^2+4r^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^a \cdot 2\pi = \frac{k\pi a^3}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

$$\bar{z} = \frac{k}{M}\iint_S z\,ds = \frac{k}{M}\iint_B \frac{1}{a}(x^2+y^2)\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4(x^2+y^2)}\;dxdy$$

$$= \frac{k}{Ma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\sqrt{a^2+4r^2}\;.rdrd\varphi = \frac{k}{Ma^2}\cdot\int_a^{2\pi}\left(\int_{a^2}^{5a^2}\frac{t-a^2}{4}\cdot t^{1/2}\cdot\frac{1}{8}\,dt\right)d\varphi$$

bulunur. İntegraller hesaplanır ve $M = \frac{k\pi a^3}{12}(5\sqrt{5}-1)$ olduğu gözönüne alınırsa $\bar{z} = \frac{25\sqrt{5}}{25\sqrt{5}-1}$ bulunur.

7. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+(z-a)^2 &= a^2 \\ x^2+y^2+z^2 &= a^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z^2 = (z-a)^2 \Rightarrow z = \frac{a}{2} \;\Rightarrow\; x^2+y^2 = \frac{3}{4}a^2$



$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$A = \iint_S ds = \iint_B \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = a\iint_B \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$= a\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}} = -a\int_0^{2\pi}(a^2-r^2)^{1/2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}d\varphi = \pi a^2$$

Prof. Dr. Mustafa BALCI

1952'de Birecik'te doğdu. İlk ve orta öğrenimini Gaziantep'te tamamladı. 1974'te AÜFF Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı dönem Ankara Yüksek Öğretmen Okulunu bitirdi. Yüksek Lisans çalışmasını 1976'da, Doktora çalışmasını 1978'de tamamladı. 1983'te Doçent, 1989'da Profesör oldu. Evli ve iki çocuk babasıdır.

ÜNİVERSİTE KİTAPLARI

Genel Matematik - 1	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Genel Matematik - 2	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Çözümlü Genel Matematik - 1	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Çözümlü Genel Matematik - 2	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Matematik Analiz - 1	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Matematik Analiz - 2	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Çözümlü Analiz Problemleri - 1	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Çözümlü Analiz Problemleri - 2	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Reel Analiz	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Analitik Geometri	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)
Temel Matematik	(Prof.Dr. Mustafa BALCI)

İsteme Adresi:

balcı Yayınları

Bayındır -1 Sokak No: 27/45 Kızılay / ANKARA
Tel: 0(312) 431 32 33 • Fax: 0(312) 431 67 67
web: www.balciyayinlari.com.tr
e-mail: mbalci@balciyayinlari.com.tr

ISBN 978-975-6883-15-6

www.ieeeturkiye.wordpress.com adına yüklenmiş olup toplumları geliştiren bilginin herhangi bir şekilde ulaşılaşılamaz olmasını kabullenemeyen kişi veya kişiler tarafından upload edilmiştir.saygılarımzla..